Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [5186] | 1| Suites arithmético-géométrique

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} & = & 2u_n - n + 2 \end{array}\right.$

et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\, v_n = u_n - n$

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5185] | 2| Suites et sommes téléscopiques

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les éléments suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & \in & [0;1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} & = & u_n - (u_n)^3 \end{array}\right.$$

(1). Étudier sur l'intervalle $[0;1]$ la fonction $f : x \longmapsto x - x^3$.

(2). Montrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \in \mathbb{N},\, 0 \leq u_n \leq 1$.

(3). Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on notera ℓ pour la suite.

(4). On considère alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\, S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (u_k)^3$.

Démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et converge vers le réel $u_0 - \ell$.

(5). On suppose dans cette question que $u_0 \in]0;1[$, et on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

On considère alors la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\, P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(1 - (u_k)^2\right)$.

Démontrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et déterminer sa limite.