Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

EX. 1 | Réf. 4662

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X-1)P' - XP'' \end{array} \right.$$

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4662

1. On s'assurera du caractère linéaire de u, puis du fait - acquis ici par l'énoncé - que $u(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.
2. On déterminera les images par u des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$.
3. On observera la forme de la matrice obtenue pour répondre. . .

EX. 2 | Réf. 1529

Pour tout entier naturel n, on désigne par I_n l'intégrale : $\quad I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que, pour tout n : $\quad I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n.$
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = (n+1)I_{n+1}I_n$.
   - **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
     On pourra utiliser le résultat de la question (2).
   - **b.** Calculer u_0.
   - **c.** En déduire que, pour tout n : $\quad (n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}.$
4. **a.** Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   - **b.** En déduire que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{n+1}{n+2} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$
     On pourra utiliser le résultat de la question (2).
   - **c.** Montrer que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et en déduire un équivalent de $n\,(I_n)^2$ en $+\infty$.
   - **d.** En déduire que la suite $(\sqrt{n}I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $\quad \forall u \in [-n; +\infty[, \quad \left(1 + \dfrac{u}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{\,u}.$
6. Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0; \sqrt{n}], \quad \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-t^2} \leq \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^n}$
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad J_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$
   Déduire de la question **(6)** un encadrement de J_n à l'aide de n, I_{2n+1} et I_{2n-2}.
8. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1529

1. RAS
2. Remarquer que $\cos^{n+2}(t) = \cos^{n+1}(t) \times \cos(t)$ et procéder à une intégration par parties.
3. **a.** Multplier les deux membres de l'égalité précédente par I_{n+1}.

   b. RAS

   c. Utiliser la valeur de u_0 pour conclure.
4. **a.** Justifier que la fonction à intégrer dans le calcul $I_{n+1} - I_n$ est positive.

   b. S'assurer que I_n ne s'annule jamais et traduire la croissance d'une suite en terme de comparaison à 1.

   c. RAS

   d. RAS
5. Utiliser l'inégalité $\ln(1 + x) \leq x$.
6. Utiliser l'inégalité précédente.
7. Même remarque
8. Même remarque.