Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1| Réf. 5307

Dans tout cet exercice, a désigne un réel non nul et A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, puis déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 + \alpha A + \beta \mathrm{Id}_3 = (0)$.

2. Montrer que la matrice A est inversible, et en donner son inverse.

3. Déterminer une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction des matrices A et I_3.

EX. 1| Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5307

1. Le calcul ne présente pas de difficultés particulières, et on essaie d'expliciter directement A^2 en fonction de A et de I_3 en limitant les calculs...

2. On exploite l'expression précdente...

3. Vu la formulation de la question, on raisonnera par récurrence pour montrer qu'il existe a_n et b_n tel que $A^n = a_n A + b_n \mathrm{I}_3$...en formulant proprement au préalable cette hypothèse de récurrence. Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construites satisfairont probablement des relations propres à des familles de suites bien connues dont il conviendra ensuite d'expliciter les termes généraux.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2| Réf. 5306

On considère la fonction f définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} [1;\mathrm{e}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{\ln(x)+1} \end{array} \right.$

et la fonction g donnée par : $g : \left| \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \dfrac{2y}{(1+y)^2} \end{array} \right.$

1. Démonter que : $\forall y \in [0;1]\,,\ 0 \leq g(y) \leq \dfrac{1}{2}$.

2. Montrer que l'intervalle $[1;\mathrm{e}]$ est stable par f, c'est à dire que : $\forall x \in [1;\mathrm{e}]\,,\ f(x) \in [1;\mathrm{e}]$.

3. Déduire des questions précédentes, que :

$$\forall\,(x,y) \in [1;\mathrm{e}] \times [1;\mathrm{e}]\,,\ |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}\,|x-y|$$

4. On désigne alors par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite donnée par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

On admettra que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1;\mathrm{e}]$

a. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \mathrm{e}\,| \leq \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n}$

b. Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

c. Déterminer un rang n à partir duquel u_n est une approximation de e au millième près.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5306

1. On peut soit étudier les variations de la fonction g sur $[0;1]$, soit construire l'encadrement à l'aide d'opérations avec les fonctions usuelles.
2. On pourra ici aussi étudier les variations de la fonction f.
3. On reconnaîtra ici l'inégalité des accroissements finis...
4. **a.** On procèdera par récurrence tout en utilisant la majoration établie à la question précédente.
   b. Le théorème d'encadrement pour les suites est clairement attendu ici...en essayant au préalable de trouver un lien entre g et f'...
   c. Il s'agit de déterminer pour quelle valeur de n on a $|u_n - \mathrm{e}| \leq \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-3}$ par exemple.