Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le résultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 3323

Soient $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que :

1. $n\left(\sqrt[n]{n}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

2. $(n+a)^n - n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} (\mathrm{e}^{\,a}-1)\,n^n$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 3323

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad n\left(\sqrt[n]{n}-1\right) = n\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln}{n}}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \dfrac{\ln(n)}{n} = \ln(n)$.

2.
- On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad (n+a)^n = \left(n\left(1+\dfrac{a}{n}\right)\right)^n = n^n\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$.

  Par ailleurs, on a déjà vu que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\,a}$, d'où $(n+a)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\,a}n^n$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad (n+a)^n - n^n = n^n\left(\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n - 1\right)$.

  Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n - 1 = \mathrm{e}^{\,a}-1$, on obtient $(n+a)^n - n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} (\mathrm{e}^{\,a}-1)\,n^n$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2384

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 &= 1\\ u_1 &= 2\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} &= u_{n+1} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} u_n \end{cases}$$

On se propose dans cet exercice de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

1. Montrer par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le signe de $u_{n+2} - u_{n+1}$.
En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3. Soit $f : \left|\begin{array}{ccc}]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \ln(1+x)-x \end{array}\right.$

a. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$, puis en étudier le signe sur $]-1;+\infty[$.

b. En déduire les variations de f sur $]-1;+\infty[$.

c. En déduire alors que : $\quad \forall x \in]-1;+\infty[\,, \quad \ln(1+x) \leq x$.

4. Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_1 \times \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$

On pourra commencer par montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq \left(1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)u_n$.

5. On définit la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$.

a. Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n \leq 1$.

b. En déduire que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \leq \mathrm{e}$.

BY NC ND

6. Montrer alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
7. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner un majorant de sa limite.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2384

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{P}(n)$: ´ $u_n > 0$ ˘.

   Initialisation : on vérifie que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
   En effet, on a bien $u_0 = 1$ et $1 > 0$, puis $u_1 = 2$ et $2 > 0$.

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que l'on a $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(\backslash + \infty)$, c'est à dire que $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$. Montrons, sous cette hypothèse que l'on a $\mathcal{P}(n+2)$ à savoir $u_{n+2} > 0$.
   Par définition $u_{n+2} = u_{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u_n$. Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$, et on a $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$, donc par somme de nombres strictement positifs, il vient que $u_{n+2} > 0$, ce qui est $\mathcal{P}(n+2)$.

   Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie aux rangs 0 et 1, et étant héréditaire, par le principe de récurrence double, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u_n.$
   Ainsi, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$.
   Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

3. **a.** Il est immédiat que :
   $$\forall x \in]-1;+\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$

   On en déduit alors le signe de $f'(x)$:

x	-1		0		$+\infty$
Signe de $-x$		$-$	0	$+$	
Signe de $1+x$	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	

   b. On en déduit alors directement les variations de f sur $]-1;+\infty[$:

x	-1		0		$+\infty$
Variations de f	$\|$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

   c. Par suite, puisque le maximum de f sur $]-1;+\infty[$, est $f(0) = 0$, il vient que pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $f(x) \leq 0$, c'est à dire $\ln(1+x) \leq x$.

4. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u_n \\ &\leq u_{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u_{n+1} \\ &\leq u_{n+1}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Par suite, il vient : $\begin{cases} u_{n+1} \leq u_n \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ u_n \leq u_{n-1} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ \vdots \\ u_2 \leq u_1 \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1\right) \end{cases}$ et ainsi :

$$u_{n+1} \leq u_1 \times \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \times \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \times \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) \times \ldots \times \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1\right)$$ ce qui donne :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_1 \prod_{k+1}^{n} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$.

5. a. D'après la question **(3)(c)**, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq 1$.

b. De l'inégalité précédente, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)\right) \leq 1$ et en composant par la fonction exponentielle : $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \leq \mathrm{e}^1$ ce qui est la relation demandée.

6. D'après la question **(4)**, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_1 \times \mathrm{e}$ ce qui permet d'affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

7. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et majorée, par le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite ℓ qui est ainsi majorée par $u_1 \times \mathrm{e} = 2\mathrm{e}$.