Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2336

1. Calculer à l'aide de deux intégrations par parties successives $I=\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+x+1\right) \mathrm{e}^{x} \,\mathrm{d}x$.

2. On se propose de calculer $J=\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

a. Pour $u \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, écrire sous forme d'un seul quotient l'expression :

$$\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}-\frac{2}{1+u^2}.$$

b. Effectuer le changement de variable $u=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ dans l'intégrale J, puis la calculer.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2336

1. On effectue une intégration par parties en posant $\begin{array}{lcl} u(x)=\mathrm{e}^{x} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x)=\mathrm{e}^{x} \\ v(x)=x^2+x+1 & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x)=2x+1 \end{array}$ où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$sur $[0;1]$. Il vient alors : $I=\left[\left(x^2+x+1\right)\mathrm{e}^{x}\right]_0^1-\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$

On effectue un nouvelle intégration par parties dans la nouvelle intégrale en posant : $\begin{array}{lcl} u(x)=\mathrm{e}^{x} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x)=\mathrm{e}^{x} \\ v(x)=2x+1 & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x)=2 \end{array}$ où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$sur $[0;1]$.

Il vient alors : $I=\left[\left(x^2+x+1\right)\mathrm{e}^{x}\right]_0^1-\left(\left[(2x+1)\,\mathrm{e}^{x}\right]_0^1-\displaystyle\int_0^1 2\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x\right)$ ce qui donne $I=\left[\left(x^2+x+1\right)\mathrm{e}^{x}\right]_0^1-\left[(2x+1)\,\mathrm{e}^{x}\right]_0^1+\left[2\mathrm{e}^{x}\right]_0^1$.

Finalement : $I=(3\mathrm{e}-3\mathrm{e}+2\mathrm{e})-(-1-1+2)$ ce qui donne $I=2\mathrm{e}-2$.

2. a. Pour tout $u\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}-\frac{2}{1+u^2} &\underset{(1-u)(1+u)=1-u^2}{=} \frac{(1-u)\left(1+u^2\right)}{(1-u)(1+u)\left(1+u^2\right)}+\frac{(1+u)\left(1+u^2\right)}{(1+u)(1-u)\left(1+u^2\right)}-\frac{2\left(1-u^2\right)}{\left(1+u^2\right)\left(1-u^2\right)}\\
&= \frac{1+u^2-u-u^3+1+u^2+u+u^3-2+2u^2}{\left(1-u^2\right)\left(1+u^2\right)}\\
&= \frac{4u^2}{\left(1-u^2\right)\left(1+u^2\right)}
\end{aligned}$$

b. Le changement de variables $u=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ permet d'écrire les relations $x=\dfrac{1+u^2}{1-u^2}$ et $\mathrm{d}x=\dfrac{4u\,\mathrm{d}u}{\left(1-u^2\right)^2}$ et pour les bornes $x=1 \iff u=0$ et $x=2 \iff u=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ainsi, il vient : $I=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{4u^2}{\left(1-u^2\right)\left(1+u^2\right)}\,\mathrm{d}u$ et par la question précédente $I=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}-\frac{2}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u$

Par suite $I=\left[\ln(1+u)-\ln(1-u))-2\arctan(u)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\ldots=\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)-\dfrac{\pi}{3}$.

EX. 2 | Réf. 2165

Calculer la valeur efficace d'une tension sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ définie par $u_{\text{eff}}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2165

Sur une période T, $u_{eff}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{U_m^2}{T}\displaystyle\int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t$. Et donc :

$$\begin{aligned} u_{\text{eff}}^2 &= \frac{U_m^2}{T}\int_0^T \frac{1-\cos(\omega t + 2\varphi)}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{U_m^2}{2T}\left[t - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t + 2\varphi)\right]_0^T \\ &= \frac{U_m^2}{2} \qquad \text{en remarquant que } \omega T = 2\pi \end{aligned}$$

Finalement, $u_{\text{eff}} = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2197

On désigne par P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$P = 4X^7 - 16X^6 + 9X^5 + 15X^4 + 15X^3 - 18X^2 - 28X - 8$$

1. Soit Q le polynôme donné par $Q = X^2 + X + 1$.
   a. Effectuer la division euclidienne de P par Q.
   b. Qu'en conclure ?
2. Vérifier que 2 est racine de P, puis en déterminer son ordre de multiplicité.
3. Terminer la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2197

1. a. On pose la division de P par Q pour obtenir : $P = \left(X^2 + X + 1\right)\left(4X^5 - 2X0^4 + 25X^3 + 10X^2 - 20X - 8\right) + 0$
   b. Le polynôme P est donc divisible par le polynôme Q, et en terme de factorisaton, cela se traduit par $P = Q \times P_1$ où $P_1 \in \mathbb{R}_5[X]$.
2. • En notant $\tilde{P}$ la fonction polynomiale associée à P, il vient :

$$\tilde{P}(2) = 4\times 2^7 - 16\times 2^6 + 9\times 2^5 + 15\times 2^4 + 15\times 2^3 - 18\times 2^2 - 28\times 2 - 8 = \ldots = 0$$

   Par suite 2 est bien racine de P.
   • On s'intéresse auX dérivées successives P', P", etc. de P, et on va vérifier si 2 est racine ou non de ces derniers.
   On a : $P' = 28X^6 - 96X^5 + 45X^4 + 60X^3 + 45X^2 - 36X - 28$ et on montre que $\tilde{P'}(2) = 0$.
   De même : $P'' = 168X^5 - 480X^4 + 180X^3 + 180X^2 + 90X - 36$ et on montre que $\tilde{P''}(2) = 0$.
   Par contre : $P''' = 840X^4 - 1920X^3 + 540X^2 + 360X + 90$ et on montre que $\tilde{P'''}(2) \neq 0$.
   Par conséquent 2 est racine de P avec pour ordre de multiplicité 3.
3. On déduit des questions précédentes que P peut s'écrire sous la forme $P = \left(X^2 + X + 1\right)(X-1)^3 \times P_2(X)$ où P_2 est un polynôme de degré 2.
   Par ailleurs, le polynôme $X^2 + X + 1$ étant de degré 2 à discriminant strictement négatif, ce dernier est irréductible dans $\mathbb{R}$.
   Division alors P par le polynôme $\left(X^2 + X + 1\right)(X-1)^3 = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$ pour obtenir P_2.
   On en déduit donc que : $P = \left(X^2 + X + 1\right)(X-2)^2\left(4X^2 + 4X + 1\right)$.

Or le polynôme $4X^2+4X+1$ est un polynôme de degré 2 à discriminant nul et de racine double $-\frac{1}{2}$. Il est donc factorisable dans $\mathbb{R}[X]$ par : $\quad 4X^2+4X+1 = 4\left(X+\frac{1}{2}\right)^2$.

Finalement : $\quad P = 4\left(X^2+X+1\right)(X-2)^2\left(X+\frac{1}{2}\right)^2$.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr|l}
4X^7 & - & 16X^6 & + & 9X^5 & + & 15X^4 & + & 15X^3 & - & 18X^2 & - & 28X & - & 8 & X^2+X+1 \\
\cline{16-16}
4X^7 & + & 4X^6 & + & 4X^5 & & & & & & & & & & & 4X^5-2X0^4+25X^3+10X^2-20X-8 \\
\cline{1-15}
 & - & 20X^6 & + & 5X^5 & + & 15X^4 & + & 15X^3 & - & 18X^2 & - & 28X & - & 8 & \\
 & - & 20X^6 & - & 20X^5 & - & 20X^4 & & & & & & & & & \\
\cline{2-15}
 & & & & 25X^5 & + & 35X^4 & + & 15X^3 & - & 18X^2 & - & 28X & - & 8 & \\
 & & & & 25X^5 & + & 25X^4 & + & 25X^3 & & & & & & & \\
\cline{5-15}
 & & & & & & 10X^4 & - & 10X^3 & - & 18X^2 & - & 28X & & -8 & \\
 & & & & & & 10X^4 & + & 10X^3 & & +10X^2 & & & & & \\
\cline{7-15}
 & & & & & & & - & 20X^3 & - & 28X^2 & - & 28X & & -8 & \\
 & & & & & & & - & 20X^3 & - & 20X^2 & - & 20X & & & \\
\cline{8-15}
 & & & & & & & & & - & 8X^2 & - & 8X & - & 8 & \\
 & & & & & & & & & - & 8X^2 & - & 8X & - & 8 & \\
\cline{10-15}
 & & & & & & & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr|c}
4X^7 & - & 16X^6 & + & 9X^5 & + & 15X^4 & + & 15X^3 & - & 18X^2 & - & 28X & - & 8 & X^5-5X^4+7X^3-2X^2+4X-8 \\
\cline{16-16}
4X^7 & - & 20X^6 & + & 28X^5 & - & 8X^4 & + & 16X^3 & - & 32X^2 & & & & & 4X^2+4X+1 \\
\cline{1-15}
 & & 4X^6 & - & 19X^5 & + & 23X^4 & - & X^3 & + & 14X^2 & - & 28X & - & 8 & \\
 & & 4X^6 & - & 20X^5 & + & 28X^4 & - & 8X^3 & + & 16X^2 & - & 32X & & & \\
\cline{3-15}
 & & & & X^5 & - & 5X^4 & + & 7X^3 & - & 2X^2 & + & 4X & - & 8 & \\
 & & & & X^5 & - & 5X^4 & + & 7X^3 & - & 2X^2 & + & 4X & - & 8 & \\
\cline{5-15}
 & & & & & & & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$