Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2203

On se propose dans cet exercice d'équilibrer la réaction chimique :

$$(\star)\quad \mathrm{K_4Fe\,(CN)_6 + KMnO_4 + H_2SO_4 \quad\longrightarrow\quad KHSO_4 + Fe_2\,(SO_4)_3 + MnSO_4 + HNO_3 + CO_2 + H_2O}$$

En d'autres termes, on cherche des nombres entiers a, b, c, d, e, f, g, h et i tels que :

$$(\star)\quad a\mathrm{K_4Fe\,(CN)_6} + b\mathrm{KMnO_4} + c\mathrm{H_2SO_4} \quad\longrightarrow\quad d\mathrm{KHSO_4} + e\mathrm{Fe_2\,(SO_4)_3} + f\mathrm{MnSO_4} + g\mathrm{HNO_3} + h\mathrm{CO_2} + i\mathrm{H_2O}$$

1. En effectuant le bilan des atomes de fer Fe, écrire une relation entre a et e.
2. De même, en effectuant le bilan des atomes d'azote N et de carbone C, écrire des relations entre g, h, a et e.
3. Trouver enfin une relation entre f et b à l'aide du bilan portant sur les atomes de manganèse Mn.
4. En effectuant le bilan des atomes de potassium K, d'oxygène O, d'hydrogène H et de soufre S, écrire un système $\mathcal{S}$ d'inconnues b, c, d, e et i.
5. Résoudre le système $\mathcal{S}$.
6. Equilibrer alors la réaction $(\star)$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2203

1. Il doit y avoir autant d'atomes de fer Fe avant réaction qu'après. Ainsi, $a = 2e$.
2. Il doit y avoir autant d'atomes d'azote N avant réaction qu'après, donc $g = 6a$.
   De même, il doit y avoir autant d'atomes de carbone C avant réaction qu'après, donc $h = 6a$.
3. Il doit y avoir autant d'atomes de manganès Mn avant réaction qu'après, donc $f = b$.
4. L'équilibrage de la réaction pour les atomes de potassium K donne la relation : $4a+b = d$ qui donne $b-d+8e = 0$.
   L'équilibrage de la réaction pour les atomes d'oxygène O donne la relation : $4b+4c = 4d+12e+4f+3g+2h+i$ qui donne $-b+c-d-3e = 0$.
   L'équilibrage de la réaction pour les atomes d'hydrogène H donne la relation : $2c = d+g+2i$, qui donne $2c-d-12e-2i = 0$.
   L'équilibrage de la réaction pour les atomes de soufre S donne la relation : $c = d+3e+f$ qui donne alors $4c-4d-72e-i = 0$.
   En écrivant matriciellement ce système d'inconnues b, c, d, e et i, il vient :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 8 & 0 & \\ -1 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -12 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -72 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim_L \cdots \sim_L \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 8 & 0 & \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -22 & -2 & \\ 0 & 0 & 0 & 188 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

   Ce système est donc compatible, d'inconnues principales b, c, d et e et pour inconnue secondaire, i.
   La poursuite de sa résolution amène au système échelonne réduit suivant :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{122}{188} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{299}{188} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{162}{188} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{188} & 0 \end{array}\right)$$

   .

Par suite, les solutions du système sont les 9-uplets de la forme :

$$\left(\frac{10}{188}i, \frac{122}{188}i, \frac{299}{188}i, \frac{162}{188}i, \frac{5}{188}i, \frac{122}{188}i, \frac{60}{188}i, \frac{60}{188}i, i\right) \text{ où } i \text{ décrit } \mathbb{N}$$

En prenant alors $i = 188$, il vient la réaction équilibrée suivante :

$$(\star)\quad 10K_4Fe(CN)_6 + 122KMnO_4 + 299H_2SO_4 \longrightarrow 162KHSO_4 + 5Fe_2(SO_4)_3 + 122MnSO_4 + 60HNO_3 + 60CO_2 + 188H_2O$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2330

L'espace est rapporte à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On note :

- $\mathcal{D}'$ la droite passant par O et dirigée par $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$;
- $\mathcal{D}$ la droite d'équations $\begin{cases} y = z \\ x = 1 \end{cases}$;
- $\mathcal{Q}$ le plan d'équation $y + z = 0$;
- pour tout réel m, $\mathcal{P}_m$ est le plan d'équation $x + my - mz = 1$.

1. Donner un vecteur normal $\overrightarrow{n_m}$ de $\mathcal{P}_m$ ainsi qu'un point et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
Vérifier que tous les plans $\mathcal{P}_m$ contiennent la droite $\mathcal{D}$.

2. Calculer $\overrightarrow{r_m} = \overrightarrow{n_m} \wedge \overrightarrow{a}$.
En déduire que $\mathcal{D}'$ n'est pas orthogonale à $\mathcal{P}_m$.
On appelle alors $\mathcal{R}_m$ l'unique plan contenant $\mathcal{D}'$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}_m$. Obtenir une équation cartésienne de $\mathcal{R}_m$.

3. Déterminer, pour tout réel m, les coordonnées dans $\mathcal{R}$ de I_m, point d'intersection des plans $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}_m$.

4. On note $(\mathcal{S})$ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 = x$ et Ω le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$.
Préciser la nature géométrique de $(\mathcal{S})$, ainsi que les éléments géométriques qui le caractérisent.

5. Vérifier que I_m appartient à $(\mathcal{S})$, puis que I_m appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2330

1.
- Une équation cartésienne de $\mathcal{P}_m$ étant $x + my - mz = 1$, un vecteur normal $\overrightarrow{n}_m$ est donc $\overrightarrow{n_n}\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -m \end{pmatrix}$.
- Un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{D}$ est $\begin{cases} y = z \\ x = 1 \end{cases}$. On peut le réécrire en $\begin{cases} y - z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$. Par suite un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est donné par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et on préfèrera prendre $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Soit $M(x_M, y_M, z_M)$ un point de $\mathcal{D}$. Alors on a nécessairement $y_M = z_M$ et $x_M = 1$.
$M \in \mathcal{P}_m$ si, et seulement si, $x_M + my_M - mz_M = 1$.
Or : $x_M + my_M - mz_M = 1 + my_M - my_M = 1$, et par suite $M \in \mathcal{P}_m$.
Par conséquent la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans tous les plans $\mathcal{P}_m$.

2.
- On a $\overrightarrow{a}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_m}\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -m \end{pmatrix}$. Par suite $\overrightarrow{r_m} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -m \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m \\ -m-1 \\ 1-m \end{pmatrix}$.
Le vecteur $\overrightarrow{a}$, qui dirige la droite $\mathcal{D}'$, n'est donc pas colinéaires au vecteur $\overrightarrow{n_m}$ qui est un vecteur normal à $\mathcal{P}_m$.
La droite $\mathcal{D}'$ n'est donc pas orthogonale au plan $\mathcal{P}_m$.
- Puisque $\mathcal{R}_m$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$, un vecteur normal à $\mathcal{P}_m$, ici $\overrightarrow{n_m}$, est donc un vecteur directeur de $\mathcal{R}_m$.
Par ailleurs, $\mathcal{R}_m$ contenant $\mathcal{D}'$, le vecteur $\overrightarrow{a}$ qui dirige $\mathcal{D}'$, est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{R}_m$.
Les deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{r_m}$ étant deux vecteurs non nuls et non colinéaires, le vecteur $\overrightarrow{r_m} \wedge \overrightarrow{a} = \overrightarrow{r_m}$ est donc

un vecteur normal à $\mathcal{R}_m$.
Une équation cartésienne de $\mathcal{R}_m$ est donc de la forme $2mx-(1+m)y+(1-m)z+d=0$ où d est un réel à déterminer. Mais comme $\mathcal{D}'$ passe par O, le plan $\mathcal{R}_m$ contient donc le point O, qui donnera alors $d=0$.
Finalement, une équation cartésienne de $\mathcal{R}_m$ est donc : $2mx-(1+m)y+(1-m)z=0$.

3. En notant $I_m(x,y,z)$, les coordonnées de I_m sont donc solutions du système $\mathcal{S}$: $\begin{cases} y+z=0 \\ x+my-mz=1 \\ 2mx-(1+m)y+(1-m)z=0 \end{cases}$.
On résout ce système à l'aide de sa représentation matricielle :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & -m & 1 \\ 2m & -(1+m) & 1-m & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & -m & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2m & -(1+m) & 1-m & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2mL_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & -m & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2m^2-1-m & 2m^2+1-m & -2m \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - (-2m^2-1-m)\,L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & -m & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4m^2+2 & -2m \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & -m & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2m^2+1 & -m \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow \frac{1}{2m^2+1} \\ \text{où } 2m^2+1\neq 0}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & -m & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{m}{2m^2+1} \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - mL_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 0 & \dfrac{m^2+1}{1+2m^2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{m}{1+2m^2} \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{m}{2m^2+1} \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - mL_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{1+2m^2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{m}{1+2m^2} \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{m}{2m^2+1} \end{array}\right)$$

Par conséquent, le point $I_m\left(\dfrac{1}{1+2m^2}, \dfrac{m}{1+2m^2}, -\dfrac{m}{1+2m^2}\right)$ est le point d'intersection des trois plans $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}_m$.

4. On a :
$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2=x \quad &\Leftrightarrow \quad x^2-x+y^2+z^2=0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2-\frac{1}{4}=0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Par conséquent $(\mathcal{S})$ est une sphère de l'espace, de centre le point $\Omega\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

5.
- Pour montrer que $I_n \in (\mathcal{S})$, on vérifie si les coordonnées de I_m satisfont l'équation cartésienne de $(\mathcal{S})$, à savoir la relation $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{4}$.
  En effet, on a :
  $$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1+2m^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{1+2m^2}\right)^2+\left(-\frac{m}{1+2m^2}\right)^2 &= \frac{1}{(1+2m^2)^2}-\frac{1}{1+2m^2}+\frac{1}{4}+\frac{m^2}{(1+2m^2)^2} \\ &= \frac{1}{(1+2m^2)^2}\frac{2m^2}{(1+2m^2)}-\frac{1}{+}2m^2\}(1+2m^2 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$
- Puisque I_m est le point d'intersection entre les trois plans $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}_m$, il appartient en particulier au plan $\mathcal{Q}$. Ainsi, I_m appartient à une sphère et à un plan. Ce plan et cette sphère étant ainsi sécants, cette intersection est un cercle $(\mathcal{C})$.
  Or le point Ω appartient aussi à $\mathcal{Q}$. Donc le cercle $\mathcal{C}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\dfrac{1}{2}$.