Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

EX. 1 | Réf. 4662

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X-1)P' - XP'' \end{array} \right.$$

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_n[X]\right)$.

2. Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4662

1. Caractère linéaire de u : soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On pose $P_3 = \lambda P_1 + P_2$. On a :

$$\begin{array}{rcl} u(P_3) & = & (X-1)\,P_3' - XP_3'' \\ & = & (X-1)\left(\lambda P_1 + P_2\right)' - X\left(\lambda P_1 + P_2\right)'' \\ & \underset{\substack{\text{Linéarité de} \\ \text{la dérivation}}}{=} & (X-1)\left(\lambda P_1' + P_2'\right) - X\left(\lambda P_1'' + P_2''\right) \\ & = & \lambda\,(X-1)\,P_1' + (X-1)\,P_2 - \lambda\,(X-1)\,P_1'' - XP_2'' \\ & = & \lambda\left((X-1)\,P_1' - XP_2'\right) + u\left(P_2\right) \\ & = & \lambda u\left(P_1\right) + u\left(P_2\right) \end{array}$$

et ainsi u est linéaire.

Image de $\mathbb{R}_n[X]$ par u : soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a : $u(P) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{(X-1)}_{\in \mathbb{R}_1[X]} \times \underbrace{P'}_{\in \mathbb{R}_{n-1}[X]}}_{\in \mathbb{R}_n[X]} - \underbrace{\underbrace{X}_{\in \mathbb{R}_1[X]} \times \underbrace{P''}_{\in \mathbb{R}_{n-2}[X]}}_{\in \mathbb{R}_{n-1}[X]}}_{\in \mathbb{R}_n[X]}$.

2. Soit $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$\begin{array}{rcl} u\left(\tilde{1}\right) & = & (X-1) \times \tilde{0} - X \times \tilde{0} \\ & = & \tilde{0} \\ u(X) & = & (X-1) \times 1 - X \times \tilde{0} \\ & = & X - 1 \\ \forall k \in [\![2; n]\!],\ u\left(X^k\right) & = & (X-1) \times kX^{k-1} - X \times k(k-1)X^{k-2} \\ & = & kX^k - k^2X^{k-1} \end{array}$$

On en déduit donc que : $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -2^2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & -3^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & -n^2 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & n \end{pmatrix}$.

3. Comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont exactement ses termes diagonaux.
On en déduit donc que $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}\left(u\right) = [\![0; n]\!]$.
Comme $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_n[X]\right)$ avec $\dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right) = n+1$, puisque u possède $n+1$ valeurs propres distinctes, par théorème, on en déduit que l'endomorphisme u est diagonalisable.

EX. 2 | Réf. 1529

Pour tout entier naturel n, on désigne par I_n l'intégrale : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Montrer que, pour tout n : $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = (n+1)I_{n+1}I_n$.

- **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
  On pourra utiliser le résultat de la question (2).
- **b.** Calculer u_0.
- **c.** En déduire que, pour tout n : $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

4.
- **a.** Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- **b.** En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad \dfrac{n+1}{n+2} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$
  On pourra utiliser le résultat de la question (2).
- **c.** Montrer que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et en déduire un équivalent de $n\,(I_n)^2$ en $+\infty$.
- **d.** En déduire que la suite $(\sqrt{n}I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $\forall u \in [-n;+\infty[\,,\quad \left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{\,u}$.

6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \forall t \in [0;\sqrt{n}]\,,\quad \left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-t^2} \leq \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^n}$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Déduire de la question **(6)** un encadrement de J_n à l'aide de n, I_{2n+1} et I_{2n-2}.

8. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1529

1. On a directement que :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1.\,\mathrm{d}t \\ &= [t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

et que :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Intégrons par parties I_{n+2} en posant :

$$\begin{aligned} u(t) = \cos^{n+1}(t) &\ \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow}\ u'(t) = -(n+1)\sin(t)\cos^n t \\ v(t) = \sin(t) &\ \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow}\ v'(t) = \cos(t) \end{aligned}$$

où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ pour obtenir :

$$\begin{array}{rcl} I_{n+2} & = & \left[\sin(t)\cos^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^n t\,\mathrm{d}t \\ & = & (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2(t)\right)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t \\ & = & (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t - (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t \\ & = & (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} \end{array}$$

d'où $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ et finalement $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$

3. **a.** On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \begin{array}{l} = (n+2)I_{n+2}I_{n+1} - (n+1)I_{n+1}I_n \\ = (n+2)\times\dfrac{n+1}{n+2}I_n \times I_{n+1} - (n+1)I_{n+1}I_n \\ = (n+1)I_nI_{n+1} - (n+1)I_{n+1}I_n \\ = 0 \end{array}$

et par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

b. On a $u_0 = (0+1)\times I_1 \times I_0$ et donc d'après ce qui précèdre, on en déduit que $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

c. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant constante, elle est égale à son premier terme et donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

4. **a.** On sait que : $\forall 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq \cos(t) \leq 1$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \cos^{n+1} t \leq \cos^n(t)$.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$

Les fonctions étant continues sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, par croissance de l'intégrale, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} \leq I_n$

Ainsisuite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

b. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} \leq I_{n+1}$ d'où $(n+2)I_{n+2} \leq (n+2)I_{n+1}$ qui donne $(n+1)I_n \leq (n+2)I_{n+1}$ qui donnera $\dfrac{n+1}{n+2} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.

c. Puisque $\dfrac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$, on en déduit que $\dfrac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et d'après le théorème d'encadrement on en déduit que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$. Comme $(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, on en déduit que : $\begin{array}{rcl} \dfrac{\pi}{2} & = & (n+1)I_{n+1}I_n \\ & \underset{n\to+\infty}{\sim} & n \times I_n \times I_n \end{array}$

c'est à dire que $n\,(I_n)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$.

d. On en déduit donc que $n\,(I_n)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$ et par composition avec la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$, on en déduit que $\sqrt{n}I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

5. Pour tout réel $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

Donc pour tout entier n et tout réel $u \geq -n$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [-n;+\infty[,\ \ln\left(1+\dfrac{u}{n}\right) \leq \dfrac{u}{n}$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [-n;+\infty[,\ n\ln\left(1+\dfrac{u}{n}\right) \leq u$

et par suite : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [-n;+\infty[,\ \left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{\,n}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0;\sqrt{n}]$, on peut appliquer l'inégalité précédente au réel $u = -t^2$: $\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{\,-t^2}$

ainsi qu'au réel $u = t^2$: $\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{\,t^2}$.

D'où l'on déduit en passant à l'inverse : $\mathrm{e}^{-t^2} \leq \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^n}$, ce qui donne au final : $\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-t^2} \leq \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^n}$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions qui interviennent étant continues sur le segment $[0;\sqrt{n}]$, par croissance de l'intégrale on obtient :

$$K_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq L_n \text{ où } K_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \text{ et } L_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}t.$$

Dans K_n, on effectue le changement de variable $t = \sqrt{n}\sin(u)$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et qui amène :

$$\begin{aligned} K_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{n}\cos^{2n+1} u\,\mathrm{d}u \\ &= \sqrt{n} I_{2n+1} \end{aligned}.$$

Dans L_n, on effectue le changement de variable $t = \sqrt{n}\tan(u)$ est bien de classe C^1 et qui amènera :

$$\begin{aligned} L_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{n}\cos^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u \\ &\underset{\substack{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\subset\left[0;\frac{\pi}{2}\right] \\ \forall t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right],\ 0\leq\cos^{2n-2}(t)}}{\leq} \sqrt{n} I_{2n-2} \end{aligned}$$

En définitive, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n} I_{2n+1} \leq \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{n} I_{2n-2}$.

8. On sait que I_{2n+1} et I_{2n-2} sont équivalents à $\sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$.

Ainsi $\sqrt{n} I_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\sqrt{n} I_{2n-2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.