Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Je m'entraîne à rédiger

EX. 1 | Réf. 4400

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.
Soient X_1, X_2, …, X_n des variables aléatoires indépendantes définie sur le même espace probabilisé et qui suivent toutes la loi uniforme sur l'ensemble $[\![1;n]\!]$.
On désigne alors par Y la variable aléatoire égale au maximum des variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n, c'est à dire que $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Déterminer la loi de Y.

2. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4400

1. Support de Y : Y étant égal au maximum des variables aléatoires X_1, …, X_n, il est possible que chaque X_i prenne sa valeur minimale c'est à dire 0, comme il est possible que l'une d'entre elle prenne sa valeur maximale qui est n.
Ainsi, $Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$.

Loi de Y : soit $k \in [\![1;n]\!]$. Il vient que : $[Y \leq k] = [X_1 \leq k] \cap \ldots \cap [X_n \leq k]$.
Par suite, comme les variables aléatoires X_1, …, X_n sont suppposées indépendantes, il vient :

$$\mathbb{P}([Y \leq k]) = \mathbb{P}([X_1 \leq k]) \times \ldots \times \mathbb{P}([X \leq k])$$

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, X_i suit une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$ et donc : $\mathbb{P}([X_i \leq k]) = \dfrac{k}{n}$.

On en déduit donc que : $\mathbb{P}([Y \leq k]) = \left(\dfrac{k}{n}\right)^n$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y = k]) &= \begin{cases} \mathbb{P}([Y \leq 1]) \text{ si } k = 1 \\ \mathbb{P}([Y \leq k]) - \mathbb{P}([Y \leq k-1]) \text{ si } k \geq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(\dfrac{1}{n}\right)^n \text{ si } k = 1 \\ \left(\dfrac{k}{n}\right)^n - \left(\dfrac{k-1}{n}\right)^n \text{ si } k \geq 2 \end{cases} \\ &= \left(\frac{k}{n}\right)^n - \left(\frac{k-1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

2. Y étant une variable aléatoire à support fini, elle admet une espérnce qui est alors égale à :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} k \times \mathbb{P}([Y = k])$$

On a alors :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{n} k\left(\left(\frac{k}{n}\right)^{n}-\left(\frac{k-1}{n}\right)^{n}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{k}{n}\right)^{n}-\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{k-1}{n}\right)^{n}\\
&= \frac{1}{n^n}\sum_{k=1}^{n} k^{n+1}-\frac{1}{n^n}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)^{n}\\
&= \frac{1}{n^n}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{n+1}-\sum_{k=1}^{n}(k-1+1)(k-1)^{n}\right)\\
&= \frac{1}{n^n}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{n+1}-\sum_{k=1}^{n}(k-1)^{n+1}-\sum_{k=1}^{n}(k-1)^{n}\right)\\
&= \frac{1}{n^n}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{n+1}-\sum_{k=0}^{n-1}k^{n+1}-\sum_{k=0}^{n-1}k^{n}\right)\\
&= \frac{1}{n^n}\left(n^{n+1}-0-\sum_{k=0}^{n-1}k^{n}\right)\\
&= n-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{n}
\end{aligned}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4401

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.
Un sac contient n jetons.
On tire successivement et sans remise deux jetons de ce sac.
On désigne par X la variable aléatoire égale au premier numéri tiré, et Y la variable aléatoire égale au deuxième numéro tiré.

1. Identifier la loi de X et donner $\mathbb{E}(X)$.
2. Déterminer la loi de Y et donner $\mathbb{E}(Y)$.
3. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. On définit la variable aléatoire Z par : $Z = |X - Y|$.
   - **a.** Expliciter le support $Z(\Omega)$ de Z.
   - **b.** Soit $k \in Z(\Omega)$. Justifier que $[Z = k] = ([Z = k] \cap [X > Y]) \cup ([Z = k] \cap [X < Y])$.
   - **c.** En déduire la loi de Z.
   - **d.** Justifier que Z admet une espérance puis la calculer.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4401

1. **Support de X :** X prend clairement ses valeurs entre 1 et n, d'où $X(\Omega) = [\![1; n]\!]$.

   Loi de X : on peut supposer lors du premier tirage que tous les tirages sont équiprobables.
   Par suite, X suit la loi uniforme sur l'ensemble $[\![1; n]\!]$.

   Espérance de X : comme X suit une loi uniforme sur l'ensemble $[\![1; n]\!]$, Y admet une espérance qui vaut $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$.
2. **Support de Y :** dès lors que le jeton numéro 1 ou n n'a pas été tiré lors du premier tirage, Y peut prendre toutes les valeurs entre 1 et n. Ainsi, $Y(\Omega) = [\![1; n]\!]$.

   Loi de Y : soit $j \in [\![1; n]\!]$. Les événements $([X = i])_{i\in[\![1;n]\!]}$ forment un système complet d'événements de probabilités non nulles. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=j]) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X=i]) \times \mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j]) \\
&= \underbrace{\mathbb{P}([X=i]) \times \mathbb{P}_{[X=i]}([Y=i])}_{=0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \mathbb{P}([X=i]) \times \mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j]) \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \times \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} 1 \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \times (n-1) \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Par suite, Y suit aussi la loi uniforme sur l'ensemble $[\![1;n]\!]$.

Espérance de Y : comme Y suit une loi uniforme sur l'ensemble $[\![1;n]\!]$, Y admet une espérance qui vaut $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{n+1}{2}$.

3. X et Y étant deux variables aléatoires à support fini, la variable aléatoire XY admet une espérance qui vaut par définition :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;n]\!]} i \times j \times \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])$$

Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i \times j \times \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i \times i \times \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=i]) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} i \times j \times \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} i \times j \times \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} i \times j \times \mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j])\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} i \times j \times \frac{1}{n(n-1)}\right) \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} i \times j
\end{aligned}$$

Par suite : $$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(i\left(\sum_{j=1}^{n} j - i\right)\right)\\ &= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{n(n+1)}{2} - i\right)\\ &= \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i^2\right)\\ &= \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\ &= \frac{n+1}{2(n-1)}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2n+1}{3}\right)\\ &= \frac{n+1}{2(n-1)}\times\frac{3n^2+3n-4n-2}{6}\\ &= \frac{n+1}{2(n-1)}\times\frac{3n^3-n-2}{6}\\ &= \frac{n+1}{2(n-1)}\times\frac{(n-1)(3n+2)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(3n+2)}{12}\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$, il vient :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Y) &= \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{n+1}{2}\times\frac{n+1}{2}\\ &= \frac{n+1}{2}\left(\frac{3n+2}{6} - \frac{n+1}{2}\right)\\ &= \frac{n+1}{2}\times\frac{3n+2-3n-3}{12}\\ &= -\frac{n+1}{12}\end{aligned}$$

4. On sait que : (X et Y sont indépendantes) $\Leftrightarrow$ $(\forall (i,j) \in X(\Omega)\times Y(\Omega),\, \mathbb{P}([X=i])\times\mathbb{P}([Y=j]) = \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=$

Or ici, on a : $$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=1])\times\mathbb{P}([Y=1]) &= \frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\\ &= \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

mais $$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) &= \mathbb{P}([X=1])\times\mathbb{P}_{[X=1]}([Y=1])\\ &= \frac{1}{n}\times 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Par conséquent, X et Y ne sont pas indépendantes.

5. a. Puisque X et Y ne peuvent prendre la même valeur, Z prendra au minimum la valeur 1 lorsque l'écart entre X et Y est minimal ce qui arrive lorsque X et Y donnent des valeurs qui se suivent, et au maximum $n-1$ lorsque X et Y prendront pour l'une sa valeur maximale et pour l'autre sa valeur minimale.
Ainsi $Z(\Omega) = [\![1; n-1]\!]$.

b. Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$. Puisque l'événement $[X=Y]$ est l'événement impossible, les deux événements $[X>Y]$ et $[X<Y]$ forment un système complet d'événements, et par suite, il vient :

$$[Z=k] = ([Z=k]\cap[X>Y]) \cup ([Z=k]\cap[X<Y]) \text{ cette réunion étant disjointe}$$

c. Soit $k \in Z(\Omega)$. La réunion précédente étant disjointe, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z=k]) &= \mathbb{P}([Z=k]\cap[X>Y]) + \mathbb{P}([Z=k]\cap[X<Y])\\ &= \sum_{i=k+1}^{n}\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=i-k]) + \sum_{i=1}^{n-k}\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=i+k])\\ &= \sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{n(n-1)} + \sum_{i=1}^{n-k}\frac{1}{n(n-1)}\\ &= \frac{1}{n(n-1)}(n-(k+1)+1) + \frac{1}{n(n-1)}((n-k)-1+)\\ &= \frac{2(n-k)}{n(n-1)}\end{aligned}$$

d. Z étant une variable aléatoire à support finie, elle admet donc une espérance qui vaut :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k \in Z(\Omega)} k \times \mathbb{P}([Z = k])$$

Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum_{k=1}^{n-1} k \times \frac{2(n-k)}{n(n-1)} \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \left(nk - k^2\right) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \left(n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \right) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \left(n \times \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right) \\
&= n - \frac{2n-1}{3} \\
&= \frac{3n - 2n + 1}{3} \\
&= \frac{n+1}{3}
\end{aligned}$$

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 1400

Soit n un entier naturel non nul.
Une urne contient $2n$ boules indiscernables au toucher : deux boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2, ..., deux boules portant le numéro n.
On effectue une succession de tirages de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :

- si les deux boules obtenues portent le même numéro, elles sont définitivement éliminées ;
- si les deux boules portent des numéros différents, elles sont remises dans l'urne avant le tirage suivant.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre nécesaires pour vider complètement l'urne.
On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une première paire de boules portant le même numéro et pour tout $i \in [\![2; n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une i^{e} paire de boules portant le même numéro, à partir d'une $(i-1)^{\text{e}}$ paire de boules.

1. a. Quelle relation lie X_n à Y_1, Y_2, ..., Y_n ?

b. Déterminer la loi de Y_1.
Plus généralement, déterminer pour $i \in [\![1; n]\!]$ la loi de Y_i. Quelle est son espérance.

c. En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = n^2$.

2. a. Dans le cas $n = 1$, puis $n = 2$, déterminer la loi de X_n.

b. On suppose $n = 3$. Montrer que :

$$\forall k \geq 3, \quad \mathbb{P}([X_3 = k]) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right)$$

3. On revient au cas général.

a. Montrer que $\mathbb{P}([X_n = n]) = \dfrac{2^n n!}{(2n)!}$.

b. Exprimer $\mathbb{P}([X_n = n+1])$ à l'aide de termes de la suite $(h_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier k non nul par $h_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 1400

1. a. On a $X_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

b.
- Pour Y_1 : du fait que, lorsque l'on tire une paire de boules de numéros différents ces dernières sont remises dans l'urne, tant que l'on n'a pas obtenu une paire de même numéro, l'urne est toujours dans le même état. Ainsi, la variable aléatoire Y_1 correspond au temps d'attente d'apparition de la première paire de boule de même numéro et suivra donc une loi géométrique de paramètre p, ce dernier étant bien constant d'après la remarque faite. La probabilité de tirer une paire de boules portant le même numéro est alors $\dfrac{\binom{n}{1}}{\binom{2n}{2}} = \dfrac{1}{2n-1} = p$ puisqu'il y a $\binom{n}{1}$ façons de choisir le numéro de la paire de boules à extraire et $\binom{2n}{2}$ façon d'extraire une paire de boules de l'urne. Par conséquent $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{2n-1}\right)$.
- Sur le même principe, dès lors qu'une paire de boule de même numéro a été extraite de l'urne, tant que l'on n'en retire pas une nouvelle, l'urne reste dans le même état. Ainsi, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, Y_i suit une loi géométrique de paramètre $p_i = \dfrac{n-i+1}{\binom{2(n-i+1)}{2}} = \dfrac{1}{2n-2i+1}$ où p_i est la probabilité d'obtenir une nouvelle paire de boules portant le même numéro quand $i-1$ paires de boules portant le même numéro ont été extraites. Ainsi $Y_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{2n-2i+1}\right)$.

On en déduit que $\mathbb{E}(Y_i) = 2n-2i+1$.

c. Par linéairité de l'espérance, $E(X_n) \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} 2n-2i+1 = n^2$.

2. a.
- Si $n=1$, X_1 est la variable aléatoire certaine égale à 1.
- Si $n=2$, l'urne contient donc deux paires de boules de même numéro. X_2 est égale au temps d'attente de la première paire de boules portant le même numéro, donc $X_2 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{3}\right)$ (voir explication pour Y_1).

b. Si $n=3$, alors Y_3 est la variable aléatoire certaine égale à 1 et donc $X_3 = Y_1+Y_2+1$.
Soit $k \geq 3$. On considère le système complet d'événements $([Y_1=1])_{i\in\mathbb{N}^*}$ pour écrire que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_3=k]) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_3=k]\cap[Y_1=k]) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{[Y_1=1]}(Y_2=k-i-1)\,\mathbb{P}(Y_1=i) \quad = \quad \sum_{i=1}^{k-2} \mathbb{P}_{[Y_1=1]}(Y_2=k-i-1)\,\mathbb{P}(Y_1=i)\end{aligned}$$

Or $\mathbb{P}_{[Y_1=1]}(Y_2=k-i-1) = \mathbb{P}(Y_2=k-i-1)$ car les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes. En effet, intuitivement, le « temps mis pour extraire la première paire de boules de même numéro » n'a pas d'incidence sur le « temps mis pour extraire la deuxième paire de boules de même numéro ». Par suite :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_3=k]) &= \sum_{i=1}^{k-2} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-i-2}\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{i-1} \quad = \quad \frac{1}{15}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-3}\sum_{i=1}^{k-2}\left(\frac{6}{5}\right)^{i-1} \\ &= \frac{1}{15}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-3}\frac{\left(\frac{6}{5}\right)^{k-2}-1}{\frac{1}{5}} \quad = \quad \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2}-\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right)\end{aligned}$$

3. a. $[X_n=n]$ est l'événement « à chaque tirageon obtient une paire de boules portant le même numéro », c'est à dire que, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $Y_i = 1$. Ainsi $[X_n=n] = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}[Y_i=1]$. En utilisant l'indépendance de ces événements, $\mathbb{P}([X_n=n]) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2n-2i+1} = \frac{2^n n!}{(2n)!}$.

b. L'événement $[X_n=n+1]$ est l'événement « à tous les tirages on obtient une paire de boules portant le même numéro, sauf à un tirage qui n'est pas le dernier tirage ». Donc :

$$[X_n=n+1] = \bigcup_{i=1}^{n-1}\left([Y_i=2]\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}[Y_j=1]\right)$$

Par incompatibilité et indépendance des événements :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left([X_n = n+1]\right) &= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\left([Y_i = 2] \bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} [Y_j = 1] \right) &&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\mathbb{P}\left(Y_i = 2\right) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mathbb{P}\left(Y_j = 1\right) \right) \\
&= p_1 p_2 \dots p_{n-1} \sum_{i=1}^{n} (1 - p_i) &&= \frac{2^n n}{(2n)!} \left(n - 1 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2j+1} \right) \\
&= \frac{2^n n!}{(2n)!} \left(n - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \right) &&= \frac{2^n n!}{(2n)!} \left(n - h_{2k} - \frac{1}{2} h_n \right)
\end{aligned}$$