Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5307

Dans tout cet exercice, a désigne un réel non nul et A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, puis déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 + \alpha A + \beta \mathrm{Id}_3 = (0)$.

2. Montrer que la matrice A est inversible, et en donner son inverse.

3. Déterminer une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction des matrices A et I_3.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 5307

1. Un calcul direct donne que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 2 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 2 \end{pmatrix}$ et il est clair que $A^2 = A + 2\mathrm{I}_3$.

2. Puisque $A^2 = A + 2\mathrm{I}_3$, il vient que : $A\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\mathrm{I}_3\right) = \mathrm{I}_3$

Par suite, la matrice A est inversible à droite, donc inversible, et son inverse est $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{I}_3$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathbb{P}(n)$ par : « Il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_n\mathrm{I}_3$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : comme $A^0 = \mathrm{I}_3$ il est clair que $A^0 = 0 \times A + 1 \times \mathrm{I}_3$ et par suite, en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, on a bien l'existence de deux réels a_0 et b_0 tels que $A^0 = a_0A + b_0\mathrm{I}_3$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$ et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.
Il est clair que $A^{n+1} = A^n \times A$ et donc par hypothèse de récurrence $A^{n+1} = (a_nA + b_n\mathrm{I}_3)\,A$.
Il vient donc que :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= a_nA^2 + b_nA \\ &= a_n\,(A + 2\mathrm{I}_3) + b_nA \\ &= (a_n + b_n)\,A + 2a_n\mathrm{I}_3 \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}$ il existe donc bien deux réels a_{n+1} et b_{n+1} tels que $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}\mathrm{I}_3$, ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Par suite, les relations $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}$ obtenues précédemment permettent d'établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$
où l'on reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 entièrement déterminée par les relations :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \text{ car } A^1 = 1 \times A + 0 \times \mathrm{I}_3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \end{cases}$$

On peut alors montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}$

ce qui permet d'établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}$

et finalement que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}A + \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}\mathrm{I}_3$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5306

On considère la fonction f définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} [1;\mathrm{e}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{\ln(x)+1} \end{array} \right.$

et la fonction g donnée par : $g : \left| \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \dfrac{2y}{(1+y)^2} \end{array} \right.$

1. Démonter que : $\forall y \in [0;1]\,,\ 0 \leq g(y) \leq \dfrac{1}{2}$.

2. Montrer que l'intervalle $[1;\mathrm{e}]$ est stable par f, c'est à dire que : $\forall x \in [1;\mathrm{e}]\,,\ f(x) \in [1;\mathrm{e}]$.

3. Déduire des questions précédentes, que :

$$\forall\,(x,y) \in [1;\mathrm{e}] \times [1;\mathrm{e}]\,,\ |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}\,|x-y|$$

4. On désigne alors par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite donnée par : $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array} \right.$

On admettra que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1;\mathrm{e}]$

a. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \mathrm{e}| \leq \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n}$

b. Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

c. Déterminer un rang n à partir duquel u_n est une approximation de e au millième près.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5306

1. La fonction $y \longmapsto 2y$ est dérivable sur $[0;1]$, et la fonction $y \longmapsto (1+y)^2$ étant dérivable sur $[0;1]$ et ne s'y annulant pas, par quotient la fonction g est dérivable sur $[0;1]$.

Un calcul direct donne alors que : $\forall y \in [0;1]\,,\ g'(y)$

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{2\times(1+y)^2 - 2y \times 2 \times 1 \times (1+y)}{(1+y)^4} \\ &= \frac{2(1+y)^2 - 4y(1+y)}{(1+y)^4} \\ &= \frac{2(1+y) - 4y}{(1+y)^4} \\ &= \frac{2-2y}{(1+y)^3} \\ &= \frac{2\,(1-y)}{(1+y)^3} \end{aligned}$$

Il est immédiat que : $\forall y \in [0;1]\,,\ 1+y \geq 0$ et donc que $(1+y)^3 \geq 0$

et de même que $1-y \geq 0$ sur cet intervalle.

On en déduit ainsi les variations de g sur $[0;1]$:

y	0		1
Signe de $g'(y)$		$+$	0
Variations de g	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

L'étude des variations de g sur $[0;1]$ donne alors que : $\forall y \in [0;1]\,,\ 0 \leq g(y) \leq \dfrac{1}{2}$.

2. La fonction $x \longmapsto 2x$ est dérivable sur $[1;\mathrm{e}]$, et la fonction $x \longmapsto \ln(x)+1$ étant dérivable sur $[1;\mathrm{e}]$ et ne s'y annulant pas, par quotient, la fonction f est dérivable sur $[1;\mathrm{e}]$.

Un calcul direct donne alors que :

$$\forall x \in [1;\mathrm{e}]\,,\ f'(x) = \frac{2\times(\ln(x)+1) - 2x\times\dfrac{1}{x}}{(\ln(x)+1)^2} = \frac{2\ln(x)+2-2}{(\ln(x)+1)^2} = \frac{2\ln(x)}{(1+\ln(x))^2}$$

Il est immédiat que : $\forall x \in [1;\mathrm{e}]\,,\ \ln(x) \geq 0$ et $(\ln(x)+1)^2 > 0$.

Par suite, on en déduit les variations de f sur $[1;\mathrm{e}]$:

x	1		e
Signe de $f'(x)$		$+$	0
Variations de f	2	$\nearrow$	e

L'étude des variations de f permet alors de conclure que : $\forall x \in [1;\mathrm{e}]\,,\ 2 \leq f(x) \leq \mathrm{e}$
et trivialement que : $\forall x \in [1;\mathrm{e}]\,,\ 1 \leq f(x) \leq \mathrm{e}$.

3. On remarque tout d'abord que : $\forall x \in [1;\mathrm{e}]\,,\ \ln(x) \in [0;1]$
et il vient alors que : $\forall x \in [1;\mathrm{e}]\,,\ f'(x) = g(\ln(x))$.
On en déduit ainsi que : $\forall x \in [1;\mathrm{e}]\,,\ 0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2}$.
La fonction f est une fonction continue sur $[1;\mathrm{e}]$ et dérivable sur $[1;\mathrm{e}]$ et donc à fortiori sur $]1;\mathrm{e}[$.
Puisque : $\forall x \in\,]1;\mathrm{e}[\,,\ |f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$
d'après l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que :

$$\forall (x,y) \in [1;\mathrm{e}]\times[1;\mathrm{e}]\,,\ |f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{2}\,|x-y|$$

4. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $|u_n - \mathrm{e}| \leq \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n}$

Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : on a $u_0 = 1 \in [1;\mathrm{e}]$ et $\mathrm{e} \in [1;\mathrm{e}]$.

Il est clair que : $|u_0 - \mathrm{e}| = \mathrm{e} - 1$ et donc que : $|u_0 - \mathrm{e}| \leq \mathrm{e} - 1$

Par ailleurs, il est trivial que : $\mathrm{e} - 1 = \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^0}$

ce qui assure que : $|u_0 - \mathrm{e}| \leq \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^0}$

ce qui est bien $\mathcal{P}(\prime)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$ et montrons sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

Puisque $u_n \in [1;\mathrm{e}]$ il vient que : $|f(u_n) - f(\mathrm{e})| \leq \dfrac{1}{2}\,|u_n - 1|$

Comme $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$ et que $f(u_n) = u_{n+1}$, on en déduit que : $|u_{n+1} - \mathrm{e}| \leq \dfrac{1}{2}\,|u_n - 1|$

Or par hypothèse de récurrence, on a : $|u_n - 1| \leq \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n}$

Il vient alors que : $|u_{n+1} - \mathrm{e}| \leq \dfrac{1}{2} \times \underbrace{\dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n}}_{=\frac{\mathrm{e}-1}{2^{n+1}}}$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence elle est donc vraie pour tout entier n.

b. D'après ce qui précède : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \mathrm{e}\,| \leq \dfrac{\mathrm{e}\, - 1}{2^n}$

et comme $\mathrm{e}\, - 1 \in [1;2]$, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \mathrm{e}\,| \leq \underbrace{\dfrac{2}{2^n}}_{=\frac{1}{2^{n-1}}}$

Par suite, si n est tel que $\dfrac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-3}$, le terme u_n de la suite sera une approximation de e à 10^{-3} près.

On cherche alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-3}$.

Un résolution donne que :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-3}\right) &\Leftrightarrow \left(-\ln\left(2^{n-1}\right) \leq \ln\left(10^{-3}\right)\right) \\
&\Leftrightarrow \left(-(n-1)\ln(2) \leq -3\ln(10)\right) \\
&\Leftrightarrow \left(n - 1 \geq \frac{3\ln(10)}{\ln(2)}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(n \geq 1 + \frac{3\ln(10)}{\ln(2)}\right)
\end{aligned}$$

et comme $1 + \dfrac{3\ln(10)}{\ln(2)} \approx 10,96$, on en déduit que la valeur de n cherchée est $n = 11$.