À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [5186] | 1| Suites arithmético-géométrique

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} &= 2u_n - n + 2 \end{cases}$

et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\, v_n = u_n - n$

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Éléments de correction

Il est immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N},\, v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = 2u_n - n + 2 - n - 1 = 2v_n + 1$

et par conséquent $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.

L'équation $x = 2x + 1$ admet comme unique solution le réel $\ell = -1$, par théorème, on sait que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $w_n = v_n + 1$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $w_0 = v_0 + 1$.

On en déduit donc que : $\forall n \in \mathbb{N},\, w_n = \underbrace{(v_0 + 1)}_{=1+1=2} \times 2^n$

et par suite que : $\forall n \in \mathbb{N},\, v_n = 2^{n+1} - 1$

et finalement que : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = 2^{n+1} - 1 + n$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5185] | 2| Suites et sommes téléscopiques

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les éléments suivants :

$$\begin{cases} u_0 &\in [0;1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} &= u_n - (u_n)^3 \end{cases}$$

(1). Étudier sur l'intervalle $[0;1]$ la fonction $f : x \longmapsto x - x^3$.

(2). Montrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \in \mathbb{N},\, 0 \leq u_n \leq 1$.

(3). Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on notera ℓ pour la suite.

(4). On considère alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\, S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_k)^3$.

Démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et converge vers le réel $u_0 - \ell$.

(5). On suppose dans cette question que $u_0 \in]0;1[$, et on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

On considère alors la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\, P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 - (u_k)^2\right)$.

Démontrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et déterminer sa limite.

Éléments de correction

(1). La fonction $f : x \longmapsto x - x^3$ est clairement dérivable sur $[0;1]$, et on a : $\forall x \in [0;1]\,,\, f'(x) = 1 - 3x^2$.

Comme on a : $\forall x \in [0;1]\,,\, f'(x) = \left(1 - x\sqrt{3}\right)\left(1 + x\sqrt{3}\right)$

La fonction f' est ainsi une fonction polynôme de degré 2 qui s'annule en $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \in [0;1]$ et en $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \notin [0;1]$, et dont le coefficient du terme de degré 2 est négatif. On en déduit alors le signe de $f'(x)$ sur $[0;1]$, et les variations de f sur $[0;1]$.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) < 1$	$\searrow$	0

(2). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$:« $0 \leq u_n \leq 1$ »
Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a que $u_0 \in [0;1]$, c'est à dire que l'on a $\mathcal{P}(n)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, et montrons sous cette hypothèse que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.
Par définition, on a que $u_{n+1} = u_n - (u_n)^3$ c'est à dire que $u_{n+1} = f(u_n)$.
Par hypothèse de récurrence, on a que $u_n \in [0;1]$, et comme $f([0;1]) \subset [0;1]$, il vient que $u_{n+1} = f(u_n) \in [0;1]$, ce qui et bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang 0 et héréditaire, donc par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

(3). Les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont données par le signe de $u_{n+1} - u_n$.
Il est immédiat ici que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \underbrace{-(u_n)^3}_{\leq 0}$

et par suite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante minorée par 0, par théorème, elle est convergente vers un réel noté ℓ.

(4). On a directement que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_n - u_{n+1}) = u_0 - u_{n+1}$$
Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, il vient que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et par suite que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_0 - \ell$.

(5). On désigne par $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ Q_n = \ln(P_n)$.

On a donc :
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ Q_n &= \ln\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1-(u_k)^2\right)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1-(u_k)^2\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_k-(u_k)^3}{u_k}\right)\\ &= = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\ln(u_{k+1}) - \ln(u_n)\right)\\ &= \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0)\end{aligned}$$
et par suite $Q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(\ell) - \ln(u_0)$ ce qui amène par composition avec la fonction exponentielle que $P_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{u_0}$.