Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . .**On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2385

1. Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la forme λx^α où $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ de $f(x) = \left((\cos(x))^{x^2} - 1\right) \tan^3(x)$.

2. Déterminer la limite en 1^- de $g(x) = \ln(x)\ln(1-x)$.

3. **a.** Montrer que $\ln(\ln(x)) = \underset{x\to+\infty}{o}(\ln(x))$.

b. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2167

On se propose de déterminer la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \end{cases}$

On considère alors la fonction f définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} [-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{1+x}{2}} \end{array} \right.$.

On remarque ainsi, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$, puis en étudier son signe.

b. Déterminer la limite en $+\infty$ de f.

c. Dresser le tableau de variations complet de f sur $[-1;+\infty[$.

d. Justifier alors que : $\forall x \in [0;1], \quad 0 \leq f(x) \leq 1$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.

3. Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$, $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

4. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - 1|$

puis que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 1| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - 1|$.

5. Conclure quant à $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.