Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . . **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Je m'entraîne à rédiger

EX. 1 | Réf. 0831

Soient X_1, X_2, X_3 et X_4 quatre variables aléatoires de Bernoulli que l'on suppose indépendantes, de même espérance mathématique p.
On définit alors la variable aléatoire Y par : $Y = X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 8X_4$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Déterminer les probabilités des événements :
   - **a.** $[Y < 8]$
   - **b.** $[4 \leq Y < 8]$
   - **c.** $[Y = 6]$ sachant que $[Y < 8]$
3. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1311

Dans cet exercice, on admet que, pour tout entier naturel k fixé et tout réel $x \in]-1;1[$, la série de terme général $\binom{n}{k} x^{n-k}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.
On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.
On lance ce dé jusqu'à obtenir un 6.
On rappelle que l'on désigne par « obtenir l'as » le fait d'obtenir la face numérotée 1 lors d'un lancer.
On désigne par X le nombre de lancers nécessaires et on désigne par Y le nombre d'as obtenus avant le premier 6.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Déterminer $Y(\Omega)$.
3. Soit $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$. Déterminer $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j])$.
4. **a.** Soit $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$. Déterminer $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$.
   - **b.** Déterminer la loi de Y.
   - **c.** Soit $Z = Y + 1$. Reconnaître la loi de Z et en déduire l'espérance et la variance de Y.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 4392

On considère une suite de lancers successifs (supposés indépendants) d'une pièce de monnaie, pour laquelle la probabilité d'apparition de « pile », noté P, est p et celle de « face », noté F, est q, avec $0 < p < 1$ et $p + q = 1$, et on s'intéresse à l'apparition de deux piles consécutifs.
Par exemple, si l'on considère les seize premiers lancers suivants :

F	P	P	F	P	P	P	F	P	F	P	P	P	P	P	F
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

deux « pile » consécutifs sont réalisés aux rangs 3, 6, 12 et 14, mais non aux rangs 7, 13 et 15 (car un « pile » ne peut

pas participer à la réalisation de deux « pile » consécutifs plus d'une fois).
On notera, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'événement : « deux « pile » consécutifs sont réalisés au rang n ».
- B_n l'événement : « deux « pile » consécutifs sont pour la première fois réalisés au rang n« .
- On désigne par a_n et b_n les probabilités de ces événements A_n et B_n.

1. Calcul des probabilités a_n

a. On a bien sûr $a_1 = 0$. Calculer de plus a_2, a_3 , a_4.

b. Démontrer, pour tout nombre entier naturel n non nul : $a_{n+2} = p^2 a_n + qp^2$.

c. On pose, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = a_n - c$ où c vérifie $c = p^2 c + qp^2$.

i. Démontrer que (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

ii. En déduire, pour tout nombre entier naturel n : $a_n = \dfrac{p}{1+p}\left(p + (-p)^n\right)$.

2. Nombre moyen de réalisations de deux piles consécutifs en n lancers
Pour tout entier naturel n non nul , on note X_n la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque l'événement A_n est réalisé, et 0 sinon.

a. Préciser la loi de X_n et son espérance.

b. Que peut-on dire de la variable aléatoire $X_n X_{n+1}$?

c. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_n X_{n+2}$.

d. Déterminer pour tout nombre entier $k \geqslant 1$ la loi de la variable aléatoire X_{n+k} conditionnée par l'événement $X_n = 1$, c'est à dire les probabilités $\mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+k} = 0)$ et $\mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+k} = 1)$.

e. Interpréter la variable aléatoire $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
Donner un équivalent du nombre moyen m_n de réalisations de deux piles consécutifs parmi n lancers lorsque n tend vers $+\infty$.