Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [5242] | 1| ENSAI 2013 Filière BL

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1). Montrer que $f^3 = \tilde{0}$ où $\tilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$.

(2). f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

(3). Montrer que la famille $\mathcal{C} = \left(f^2(e_3), f(e_3), e_3\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(4). Donner la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$.

(5). La matrice A est-elle diagonalisable ?

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5241] | 2| Extrait ENS 2020 Filière D2

Cet exercice s'intéresse à l'étude d'endomorphismes spécifiques de $\mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ et si $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$, on rappelle que la puissance n-e où $n \in \mathbb{N}$ d'un endomorphisme est définie par

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$$

avec la convention que $f^0 = \mathrm{Id}$ et $f^1 = f$.
Un endomorphisme est dit nilpotent lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = \tilde{0}$ où $\tilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$. On définit alors l'indice de nilpotence p^* de f par : $p^* = \min\left\{p \in \mathbb{N}^*,\ f^p = \tilde{0}\right\}$. Il s'agit donc du plus petit entier positif tel que f^p est l'endomorphisme nul.

De même, une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel qie $M^p = (0)$ où (0) désigne la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et on définit de manière similaire l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente.

Dans tout ce qui suit, on désigne par N_1 et N_2 les deux matrices suivantes :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et par f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ non nul dont on note p^* son indice de nilpotence.

(1). Montrer que N_1 et N_2 sont nilpotentes et préciser leur indice de nilpotence.

(2). Justifier qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $f^{p^*-1}(x_0) \neq \overrightarrow{0}$.

(3). Montrer que la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p^*-1}(x_0)\right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

(4). En déduire que $p^* \leq 3$.

(5). On suppose dans cette question que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ et l'objectif de cette question est de montrer que $p^* = 3$. On raisonne par l'absurde en supposant donc que $p^* = 2$.

(a). Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$.

(b). En déduire une absurdité et conclure.

(c). Justifier que la famille $\left(x_0, f\,(x_0)\,, f^2\,(x_0)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(d). En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est N_2.

(6). Montrer que lorsque $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) = 2$, il existe une base dans laquelle la matrice de f est N_1.