

Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'appropriier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle-même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2385

- Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la forme λx^α où $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ de $f(x) = ((\cos(x))^{x^2} - 1) \tan^3(x)$.
- Déterminer la limite en 1^- de $g(x) = \ln(x) \ln(1-x)$.
- a. Montrer que $\ln(\ln(x)) = o_{x \rightarrow +\infty}(\ln(x))$.
b. En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2385

- Utiliser les relations d'équivalences et les équivalents usuels dans le bon ordre!
- a. Revenir à la définition.
b. Revenir à une écriture exponentielle et utiliser la question précédente.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2167

On se propose de déterminer la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \end{cases}$$

On considère alors la fonction f définie par :

$$f : \begin{cases} [-1; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\frac{1+x}{2}} \end{cases}$$

On remarque ainsi, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1; +\infty[$, puis en étudier son signe.
b. Déterminer la limite en $+\infty$ de f .
c. Dresser le tableau de variations complet de f sur $[-1; +\infty[$.
d. Justifier alors que : $\forall x \in [0; 1], 0 \leq f(x) \leq 1$.
- Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 1]$.
- Montrer que, pour tout $x \in [0; 1]$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
- En utilisant l'inégalité des accroissements finis, justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - 1|$
puis que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^n |u_0 - 1|$.
- Conclure quant à $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2167

1.
 - a. Dériver une fonction de la fonction \sqrt{u} , puis étudier le signe d'un quotient.
 - b. Calculer la limite avec les opérations usuelles.
 - c. Dresser un tableau de variations complets à l'aide du signe de la dérivée.
 - d. Exploiter les variations de f pour en déduire l'encadrement demandée.
2. Effectuer le raisonnement par récurrence en identifiant bien au préalable l'assertion à montrer.
3. Majorer sur l'intervalle demandé la dérivée $f'(x)$.
4. Utiliser l'inégalité des accroissements finis avec f et un intervalle à préciser en remarquant que $u_{n+1} = f(u_n)$.
5. Exploiter l'encadrement pour obtenir la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.