Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4663

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$$

1. Est-ce que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$?
2. Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux rangés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telle que $A = PDP^{-1}$.
3. Déterminer alors une matrice Q orthogonale telle que $A = QDQ^T$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4663

1. On pourra remarquer que la matrice A est symétrique...
2. On recherchera les éléments propres de la matrice A afin de déterminer la matrice P demandée en observant la forme de la matrice.
3. Il s'agira de construire une base orthonormée pour chaque sous-espace propre pour obtenir la matrice Q demandée.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4419

Soit $(E, \langle \bullet \,|\, \bullet \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $(a, \alpha) \in E \times \mathbb{R}^*$ tel que $\|a\| = 1$.
On admet que $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + \alpha \langle x \,|\, a \rangle\, a \end{array} \right.$ est un endomorphisme de E.

1. Montrer que : $\forall (x, y) \in E \times E, \quad \langle f(x) \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, f(y) \rangle$.
2. Montrer que si F est un sous-espace stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f.
3. Montrer que a est un vecteur propre de f.
4. Montrer que 1 est valeur propre de f.
5. Pour quelle valeur de α l'endomorphisme f est-il une isométrie.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4419

1. On utilisera la définition de f et la bilinéarité du produit scalaire pour établir l'égalité demandée.
2. Il s'agit donc de montrer que si $x \in F^\perp$, alors $f(x) \in F^\perp$, c'est à dire que $f(x)$ est orthogonal à tout élément de F, lui-même stable par f.
3. On évaluera $f(a)$ et on montrera qu'il est colinéaire à a.
4. On pourra essayer de résoudre l'équation $f(x) = x$ pour montrer que 1 est valeur propre.
5. Il s'agira de déterminer la valeur de a pour laquelle f conserve la norme dans un premier temps, puis montrer que pour la valeur de α trouver, on a affaire à une symétrie orthogonale dont on identifiera les éléments caractéristiques.