Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 4516

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale p sur la droite dirigée par $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4516

EX. 2 | Réf. 4496

On admet que l'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0) \end{array} \right.$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Déterminer l'orthogonal de $F = \text{Vect}\left(X^2 + 1, X^2 - X - 1\right)$ pour ce produit scalaire.

2. Déterminer le projeté orthogonal de X sur F pour ce produit scalaire.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4496

1. On utilisera la caratérisation de l'orthogonal d'un sous-espace défini à partir d'une de ses familles génératrices.

2. Il s'agit simplement de décomposer le vecteur X comme somme d'un élément de F et d'un élément de $F^\perp$ ou de construire une base orthonormée de F pour avoir une expression du projeté orthogonal de X sur F.

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 4379

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{O}(n)$.

Montrer que : $\left| \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right| \leq n$

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4379

- Penser à Cauchy-Scwharz dans $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$.
- Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à AX et X pour un vecteur $X \in \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ bien choisi pour le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- On n'oubliera pas que $A \in \mathcal{O}(n)$.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 4425

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.
2. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant :
$$\forall\,(P,Q)\in\mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X],\ \langle P\,|Q\,\rangle = -\int_0^1 P(t)Q(t)t\ln(t)\,\mathrm{d}t$$
3. Calculer $\langle X^r\,|1\,\rangle$ pour tout $r\in\mathbb{N}$, et en déduire alors $\langle X^p\,|X^q\,\rangle$ pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}$.
4. Déterminer alors la projection orthogonale du polynôme X^2+X+1 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4425

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 1578

1. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$.

   On admet que l'application φ définie par $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soient $h : x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ et pour $n\in\mathbb{N}$, $H_n : x \longmapsto (-1)^n\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}h^{(n)}(x)$.
   - **a.** Trouver une relation entre H_{n+1}, H_n et H_n'.
   - **b.** Montrer que H_n est un polynôme de degré n.
     Les polynômes H_n sont appelés les polynômes de Hermite.
   - **c.** Montrer que :
     $$\forall n\in\mathbb{N},\qquad H_{n+1} = XH_n + nH_{n-1}$$
     et en déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad H_n' = nH_{n-1}$.
   - **d.** Montrer que : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_k(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 0.$
3. Montrer que les polynômes d'Hermite sont orthogonaux pour le produit scalaire défini précédemment.

EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1578

1. Chercher un équivalent d'une expression du type $P(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.
2. **a.** On exprime les trois expressions et on les combine.
   - **b.** On effectue un raisonnement par récurrence sur le degré de H_n.
   - **c.** La formule de Leibniz...
   - **d.** On intègre en utilisant les dérivées n^{e} de h.
3. On calcule tous les produits scalaires nécessaires...