Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Je m'entraîne à rédiger

EX. 1 | Réf. 0831

Soient X_1, X_2, X_3 et X_4 quatre variables aléatoires de Bernoulli que l'on suppose indépendantes, de même espérance mathématique p.
On définit alors la variable aléatoire Y par : $Y = X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 8X_4$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Déterminer les probabilités des événements :
   - **a.** $[Y < 8]$
   - **b.** $[4 \leq Y < 8]$
   - **c.** $[Y = 6]$ sachant que $[Y < 8]$
3. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0831

1. Déterminer le support de Y en considérant des mots binaires sur 4 bits.
2. **a.** On pourra exprimer l'événement $[Y < 8]$ à l'aide d'un événement portant sur X_4.
   - **b.** On pourra exprimer l'événement $[4 \leq Y < 8]$ à l'aide d'un événement portant sur X_4 et X_3.
   - **c.** On reviendra à la définition d'une probabilité conditionnelle.
3. La linéarité de l'espérance et le caractère indépendant des variables aléatoires permettra de conclure.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1311

Dans cet exercice, on admet que, pour tout entier naturel k fixé et tout réel $x \in \,]-1;1[$, la série de terme général $\binom{n}{k} x^{n-k}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.
On lance ce dé jusqu'à obtenir un 6.
On rappelle que l'on désigne par « obtenir l'as » le fait d'obtenir la face numérotée 1 lors d'un lancer.
On désigne par X le nombre de lancers nécessaires et on désigne par Y le nombre d'as obtenus avant le premier 6.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Déterminer $Y(\Omega)$.
3. Soit $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$. Déterminer $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j])$.
4. **a.** Soit $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$. Déterminer $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$.
   - **b.** Déterminer la loi de Y.
   - **c.** Soit $Z = Y + 1$. Reconnaître la loi de Z et en déduire l'espérance et la variance de Y.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1311

1. On pourra remarquer que X correspond au temps d'attente du premier succès qui consiste à obtenir la face « six », et donc qu'elle suit une loi géométrique.
2. Si le six est obtenu dès le premier lancer, $Y = 0$ et il est possible d'avoir beaucoup d'as même si l'on obtient jamais le six.
3. Il y a une discussion à avoir sur i et j, et surtout reconnaître que sachant $[X = i]$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = i]$ est une loi binomiale.
4. **a.** On utilisera la formule des probabilités composées.
   b. On utilisera le système complet d'événements associés à X pour calculer $\mathbb{P}([Y = j])$.
   c. Z suit une loi géométrique. La linéarité de l'espérance permettra de conclure.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 4392

On considère une suite de lancers successifs (supposés indépendants) d'une pièce de monnaie, pour laquelle la probabilité d'apparition de « pile », noté P, est p et celle de « face », noté F, est q, avec $0 < p < 1$ et $p + q = 1$, et on s'intéresse à l'apparition de deux piles consécutifs.
Par exemple, si l'on considère les seize premiers lancers suivants :

F	P	P	F	P	P	P	F	P	F	P	P	P	P	P	F
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

deux « pile » consécutifs sont réalisés aux rangs 3, 6, 12 et 14, mais non aux rangs 7, 13 et 15 (car un « pile » ne peut pas participer à la réalisation de deux « pile » consécutifs plus d'une fois).
On notera, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'événement : « deux « pile » consécutifs sont réalisés au rang n ».
- B_n l'événement : « deux « pile » consécutifs sont pour la première fois réalisés au rang n« .
- On désigne par a_n et b_n les probabilités de ces événements A_n et B_n.

1. **Calcul des probabilités a_n**
   a. On a bien sûr $a_1 = 0$. Calculer de plus a_2, a_3 , a_4.
   b. Démontrer, pour tout nombre entier naturel n non nul : $a_{n+2} = p^2 a_n + qp^2$.
   c. On pose, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = a_n - c$ où c vérifie $c = p^2 c + qp^2$.
      i. Démontrer que (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
      ii. En déduire, pour tout nombre entier naturel n : $a_n = \dfrac{p}{1+p}\left(p + (-p)^n\right)$.
2. **Nombre moyen de réalisations de deux piles consécutifs en n lancers**
   Pour tout entier naturel n non nul , on note X_n la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque l'événement A_n est réalisé, et 0 sinon.
   a. Préciser la loi de X_n et son espérance.
   b. Que peut-on dire de la variable aléatoire $X_n X_{n+1}$?
   c. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_n X_{n+2}$.
   d. Déterminer pour tout nombre entier $k \geqslant 1$ la loi de la variable aléatoire X_{n+k} conditionnée par l'événement $X_n = 1$, c'est à dire les probabilités $\mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+k} = 0)$ et $\mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+k} = 1)$.
   e. Interpréter la variable aléatoire $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
   Donner un équivalent du nombre moyen m_n de réalisations de deux piles consécutifs parmi n lancers lorsque n tend vers $+\infty$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4392

1. **a.** On utilisera le caractère indépendant des lancers pour expliciter les événements qui interviennent.
   b. Même remarque.
   c. On fera apparaître une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

2. **a.** Reconnaître une loi de Bernoulli.
   b. Le produit est toujours nuls...
   c. Reconnaître une loi de Bernoulli.
   d. C'est une histoire de doublé...
   e. On utilise la linéarité de l'espérance.