À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [5242] | 1| ENSAI 2013 Filière BL

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1). Montrer que $f^3 = \tilde{0}$ où $\tilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$.

(2). f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

(3). Montrer que la famille $\mathcal{C} = \left(f^2(e_3), f(e_3), e_3\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(4). Donner la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$.

(5). La matrice A est-elle diagonalisable ?

Pistes de réflexion

(1). Il y a un lien entre f^3 et A^3 qu'il convient de rappeler correctement.

(2). L'inversibilité de la matrice A donne la réponse à l'aide du théorème de caractérisation des automorphismes par leur représentation matricielle. ?

(3). On s'attachera à montrer la liberté de la famille en partant d'une combinaison linéaire nulle, que l'on composera par l'application f plusieurs fois de sorte à obtenir la nullité des coefficients de cette combinaison linéaire.

(4). On explicite les images des vecteurs de la base $\mathcal{C}$ en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{C}$.

(5). On remarque que l'on dispose alors de toutes les valeurs propres possibles pour A...

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5241] | 2| Extrait ENS 2020 Filière D2

Cet exercice s'intéresse à l'étude d'endomorphismes spécifiques de $\mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ et si $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$, on rappelle que la puissance n-e où $n \in \mathbb{N}$ d'un endomorphisme est définie par

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$$

avec la convention que $f^0 = \mathrm{Id}$ et $f^1 = f$.
Un endomorphisme est dit nilpotent lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = \tilde{0}$ où $\tilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$. On définit alors l'indice de nilpotence p^* de f par : $p^* = \min\left\{p \in \mathbb{N}^*,\ f^p = \tilde{0}\right\}$. Il s'agit donc du plus petit entier positif tel que f^p est l'endomorphisme nul.

De même, une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel qie $M^p = (0)$ où (0) désigne la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et on définit de manière similaire l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente.

Dans tout ce qui suit, on désigne par N_1 et N_2 les deux matrices suivantes :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et par f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ non nul dont on note p^* son indice de nilpotence.

(1). Montrer que N_1 et N_2 sont nilpotentes et préciser leur indice de nilpotence.

(2). Justifier qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $f^{p^*-1}(x_0) \neq \overrightarrow{0}$.

(3). Montrer que la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p^*-1}(x_0)\right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

(4). En déduire que $p^* \leq 3$.

(5). On suppose dans cette question que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ et l'objectif de cette question est de montrer que $p^* = 3$. On raisonne par l'absurde en supposant donc que $p^* = 2$.

- **(a).** Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
- **(b).** En déduire une absurdité et conclure.
- **(c).** Justifier que la famille $\left(x_0, f(x_0), f^2(x_0)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- **(d).** En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est N_2.

(6). Montrer que lorsque $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$, il existe une base dans laquelle la matrice de f est N_1.

Pistes de réflexion

(1). On calcule les puissances successives de N_1 et N_2.

(2). Si ce n'était pas le cas, que se passera-t-il pour $f^{p^*-1}(x_0)$?

(3). On s'attachera à montrer la liberté de la famille en partant d'une combinaison linéaire nulle, que l'on composera par l'application f plusieurs fois de sorte à obtenir la nullité des coefficients de cette combinaison linéaire.

(4). On connaît la taille maximale des familles libres de $\mathbb{R}^3$.

(5). **(a).** On raisonne simplement par inclusion en n'oubliant pas de composer par f le bon nombre de fois.

- **(b).** Le théorème du rang amène à une contradiction.
- **(c).** On dispose déjà de la liberté de la famille...
- **(d).** La base précédente doit sûrement répondre au problème.

(6). On reprend le questionnement précédent.