Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2078

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) linéaire d'ordre 2 à coefficients constants suivante :

$$(E) : \qquad y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-x} + \cos(2x)$$

puis déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $\begin{cases} f(0) = -1 \\ \text{et} \\ f'(0) = 2 \end{cases}$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2078

(E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constant, dont le second membre $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x} + \cos(2x)$ est défini et continue sur $\mathbb{R}$. On cherchera donc à résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

- **Résolution de l'équation homogène (E_H) associée à (E) :** $(E_H) : \quad y'' + 4y' + y = 0.$
  L'équation caractéristique associée à (E_H) est l'équation d'inconnue r : $(E_c) : \quad r^2 + 4r + 4 = 0.$
  Son discriminant est nul et le seule solution à cette dernière est donc $r = -2$.
  Par suite, les solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y_H définies sur $\mathbb{R}$ par : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_H(x) = (A + Bx)\,\mathrm{e}^{-2x} \text{ où } (A,B) \in \mathbb{R}^2}$
- **Recherche d'une solution particulière y_0 de (E) sur $\mathbb{R}$:** on procède en utilisant le principe de superposition des solutions en posant :

$$\begin{cases} (E_1) : \quad y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-x} \\ \qquad \text{et} \\ (E_2) : \quad y'' + 4y' + 4y = \cos(2x) \end{cases} \quad \text{et pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad y_0(x) = \underbrace{y_1(x)}_{\substack{\textbf{Solution de} \\ (E_1)\ \textbf{sur}\ \mathbb{R}}} + \underbrace{y_2(x)}_{\substack{\textbf{Solution de} \\ (E_2)\ \textbf{sur}\ \mathbb{R}}}$$

  ↪ **Recherche d'une solution particulière y_1 de (E_1) sur $\mathbb{R}$:** le second membre de l'équation (E_1) est de la forme $x \longmapsto K\mathrm{e}^{\omega x}$ avec $K = 1$ et $\omega = -1$. Comme ω n'est pas racine de l'équation caractéristique associée à (E_1) (qui est la même que (E)), on cherchera y_1 sous la forme : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_1(x) = \alpha\mathrm{e}^{-x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad y_1'(x) = -\alpha\mathrm{e}^{-x}$ et $y_1''(x) = \alpha\mathrm{e}^{-x}$.
  En reportant dans (E_1), il vient : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha\mathrm{e}^{-x} + 4 \times (-\alpha\mathrm{e}^{-x}) + 4 \times \alpha\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$ ce qui donne $\alpha\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$ et donc $\alpha = 1$.
  Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}}$.

  ↪ **Recherche d'une solution particulière y_2 de (E_2) sur $\mathbb{R}$:** le second membre de l'équation (E_1) est de la forme $x \longmapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ avec $A = 1$, $B = 0$ et $\omega = 2$. Comme $\mathrm{i}\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique associée à (E_2) (qui est la même que (E)), on cherchera y_2 sous la forme : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_2(x) = \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
  On a ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y_2'(x) = -2\alpha\sin(2x) + 2\beta\cos(2x) \\ y_2''(x) = -4\alpha\cos(2x) - 4\beta\sin(2x) \end{cases}$.
  En reportant que (E_2), il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{-4\alpha\cos(2x) - 4\beta\sin(2x)}_{y_2''(x)} + 4\underbrace{(-2\alpha\sin(2x) + 2\beta\cos(2x))}_{y_2'(x)} + 4\underbrace{(\alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x))}_{y_2(x)} = \cos(2x)$$

  ce qui amène à : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (-8\alpha + 8\beta)\cos(2x) - 8\alpha\sin(2x) = \cos(2x)$.
  Ainsi, par identification, il vient : $\begin{cases} -8\alpha + 8\beta = 1 \\ -8\alpha = 0 \end{cases}$, ce qui donne $\alpha = 0$ et $\beta = \dfrac{1}{8}$. Par conséquent, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{y_2(x) = \dfrac{1}{8}\sin(2x)}$.

↪ Par le principe de superposition des solutions, on en déduit que la fonction y_0 donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{y_0(x) = \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{y_1(x)} + \underbrace{\frac{1}{8}\sin(2x)}_{y_2(x)}}$$

est une solution particulière de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

- **Résolution de (E) sur $\mathbb{R}$:** les fonctions solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \underbrace{(A+Bx)\,\mathrm{e}^{-2x}}_{y_H(x)} + \underbrace{\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{8}\sin(2x)}_{y_0(x)} \text{ où } (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

- **Recherche de la fonction f :** on cherche donc la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $\begin{cases} f(0) = -1 \\ \text{et} \\ f'(0) = 2 \end{cases}$. Puisque f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = (A+Bx)\,\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{8}\sin(2x)$.

  Ainsi, la condition $f(0) = -1$ donne : $f(0) = \begin{cases} -1 \\ (A + B\times 0)\,\mathrm{e}^{-2\times 0} + \mathrm{e}^{-0} + \frac{1}{8}\sin(2\times 0) \end{cases}$.

  On en déduit donc que : $A = -1$, puisque $\mathrm{e}^{0} = -2$ et $\sin(0) = 0$.

  Par suite, on a déjà : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (-2+Bx)\,\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{8}\sin(2x)$.

  Pour utiliser la deuxième condition $f'(0) = 2$, on commence par calculer la dérivée de f :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = B\mathrm{e}^{-2x} - 2\,(-1+Bx)\,\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{4}\cos(2x)$$

  Ainsi, la condition $f'(0) = 2$ donne : $f'(0) = \begin{cases} 2 \\ B\mathrm{e}^{-2\times 0} - 2\,(-2 - B\times 0)\,\mathrm{e}^{-2\times 0} - \mathrm{e}^{-0} + \frac{1}{4}\cos(2\times 0) \end{cases}$.

  On en déduit donc que : $2 = B + 2 - 1 + \frac{1}{4}$ et donc finalement que : $B = 2 - 4 + 1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$.

  Par conséquent, on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = y(x) = \left(-1 - \frac{5}{4}x\right)\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{8}\sin(2x)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2324

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 4$, on a : $u_n = 2 + \dfrac{2}{n} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}$

2. Soit $n \geq 4$. Montrer que pour tout $k \in [\![2; n-2]\!]$, $\binom{n}{k} \geq \dfrac{n(n-1)}{2}$.

3. En déduire un encadrement de u_n et montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2324

1. Pour $n \geq 4$. On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} + \frac{1}{\binom{n}{n}} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{1} \\ &= 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \end{aligned}$$

2. Soit $n \geq 4$ et $n \in [\![2; n-2]\!]$. Par définition $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!}$

Ainsi, $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{n-2}{k} \times s\underbrace{\frac{n-3}{k-1}}_{\geq 1} \times \ldots \times \underbrace{\frac{n-k+1}{3}}_{\geq 1} \geq \frac{n(n-1)}{2}$

3. Il vient alors que pour tout $n \geq 4$ et $k \in [\![2; n-2]\!]$, $\frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \frac{2}{n(n-1)}$.

Ainsi, $u_n = \underbrace{2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}}_{\geq 0} \leq 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{n(n-1)}$ ce qui donne $2 \leq u_n \leq 2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n(n-1)} \times (n-2-2+1)$

soit $2 \leq u_n \leq 2 + \frac{2}{n} + (n-3)\frac{2}{n(n-1)}$.

Par ailleurs, puisque $\frac{2}{n} + (n-3)\frac{2}{n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient par le théorème d'encadrement que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.