Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4663

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$$

1. Est-ce que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$?
2. Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux rangés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telle que $A = PDP^{-1}$.
3. Déterminer alors une matrice Q orthogonale telle que $A = QDQ^T$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4663

1. La matrice A est une matrice symétrique réelle. D'après le théorème spectral, elle est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$, et ses sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux pour le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
2. On remarque que : $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, d'où $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ et ainsi 2 est valeur propre de A et $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \in E_2(A)$.

   Sur le même principe : $A\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, d'où $A\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ et ainsi 1 est valeur propre de A et $\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \in E_1(A)$.

   De même : $A\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, d'où $A\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et ainsi -1 est valeur propre de A et $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \in E_{-1}(A)$.

   Pour finir : $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, d'où $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$ et ainsi -2 est valeur propre de A et $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \in E_{-2}(A)$.

   On en déduit que $\{-2,-1,1,2\} \subset \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A)$. Comme $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, elle possède au plus 4 valeurs propres distinctes. Ainsi $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-2,-1,1,2\}$.

Par ailleurs, la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $A = P \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=D} P^{-1}$.

3. Les sous-espaces propres de la matrice A sont orthogonaux deux à deux, et compte-tenu des éléments présentés sont tous des droites vectorielles, donc de dimension 1.

Les résultats précédents donnent que $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et que $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ où chaque base est clairement orthonormée.

On en déduit alors que la matrice $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}P \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$ est telle que $A = QDQ^T$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4419

Soit $(E, \langle \bullet \,|\, \bullet \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $(a, \alpha) \in E \times \mathbb{R}^*$ tel que $\|a\| = 1$.
On admet que $f : \begin{array}{|lcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + \alpha \langle x \,|\, a \rangle a \end{array}$ est un endomorphisme de E.

1. Montrer que : $\forall (x, y) \in E \times E, \quad \langle f(x) \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, f(y) \rangle$.
2. Montrer que si F est un sous-espace stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f.
3. Montrer que a est un vecteur propre de f.
4. Montrer que 1 est valeur propre de f.
5. Pour quelle valeur de α l'endomorphisme f est-il une isométrie.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4419

1. Soit $(x, y) \in E \times E$. On a :
$$\begin{aligned} \langle f(x) \,|\, y \rangle &= \langle x + \alpha \langle x \,|\, a \rangle a \,|\, y \rangle \\ &\underset{\text{Bilinéarité}}{=} \langle x \,|\, y \rangle + \alpha \langle x \,|\, a \rangle \langle a \,|\, y \rangle \\ &= \langle x \,|\, y \rangle + \alpha \langle y \,|\, a \rangle \langle x \,|\, a \rangle \\ &= \langle x \,|\, y + \alpha \langle y \,|\, a \rangle a \rangle \\ &= \langle x \,|\, f(y) \rangle \end{aligned}$$

2. Soit F un sous-espace de E stable par f.
Montrons que $F^\perp$ est stable par f.
Soit alors $x \in F^\perp$ et $y \in F$.
Montrons que $\langle f(x) \,|\, y \rangle = 0$.
Puisque F est stable par f, on a donc $f(y) \in F$ et ainsi $\langle x \,|\, f(y) \rangle = 0$.
Or d'après la question précédente, $\langle x \,|\, f(y) \rangle = \langle f(x) \,|\, y \rangle$.
Ainsi, $\langle f(x) \,|\, y \rangle = 0$ et donc $f(x)$ et y sont orthogonaux.
Par conséquent, $f(x)$ étant orthogonal à tout vecteur de F, il appartient à $F^\perp$, ce qui assure que $F^\perp$ est stable par f.

3. Puisque $\|a\| = 1$, on a $a \neq \overrightarrow{0}$, et on a directement que :
$$\begin{aligned} f(a) &= a + \alpha \underbrace{\langle a \,|\, a \rangle}_{=1} a \\ &= (1 + \alpha) a \end{aligned}$$
et ainsi, a est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $1 + \alpha$.

4. Analyse : soit $x \neq \overrightarrow{0}$ tel que $x \in E_1(f)$. Alors $f(x) = x$.
Par définition de f, on a donc : $\alpha \langle x \,|\, a \rangle a = 0$.

Comme $\alpha \neq 0$ et $a \neq \overrightarrow{0}$, on en déduit que $\langle x \,|a\rangle = 0$ et donc que x est orthogonal à a.

Synthèse : soit $x \neq \overrightarrow{0}$ tel que $x \in (\text{Vect }(a))^{\perp}$.

On a alors : $$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x + \alpha \underbrace{\langle x \,|a\rangle}_{\substack{=0 \textbf{ car} \\ x \in (\text{Vect }(a))^{\perp}}} a \\ & = & x \end{array}$$

et ainsi x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.

5. On sait que : $$\begin{array}{rcl} (\, f \text{ est une isométrie}\,) & \Leftrightarrow & (\,\forall\,(x,y) \in E \times E,\, \langle f(x) \,|f(y)\rangle = \langle x \,|y\rangle\,) \\ & \Leftrightarrow & (\,\forall x \in E,\, \|f(x)\| = \|x\|\,) \end{array}$$

Analyse : supposons que f soit une isométrie. Alors on a en particulier $\|f(a)\| = \|a\|$.

Or a est un vecteur propre associé à la valeur propre $\alpha + 1$. Ainsi, $\|f(a)\| = |\alpha + 1|\,\|a\|$, et par suite, on a nécessairement $|\alpha + 1| = 1$, c'est à dire $\alpha = -2$ puisque $\alpha \neq 0$.

Synthèse : soit $f : \left| \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x - 2\,\langle x \,|a\rangle\, a \end{array} \right.$.

Par bilinéarité du produit scalaire, il vient :

$$\begin{array}{rcl} \forall\,(x,y) \in E \times E,\, \langle f(x) \,|f(y)\rangle & = & \langle x - 2\,\langle x \,|a\rangle\, a \,|y - 2\,\langle y \,|a\rangle\, a\rangle \\ & = & \langle x \,|y\rangle \underbrace{-2\,\langle y \,|a\rangle\,\langle x \,|a\rangle - 2\,\langle x \,|a\rangle\,\langle y \,|a\rangle + 4\,\langle x \,|a\rangle\,\langle y \,|a\rangle\,\underbrace{\langle a \,|a\rangle}_{=1}}_{=0} \\ & = & \langle x \,|y\rangle \end{array}$$

et ainsi, f est une isométrie.

On a tout d'abord que : $$\begin{array}{rcl} \forall x \in E,\, f\,(f(x)) & = & f(x) - 2\,\langle f(x) \,|a\rangle\, x \\ & = & x - 2\,\langle x \,|a\rangle\, a - 2\,\langle x - 2\,\langle x \,|a\rangle\, a \,|a\rangle \\ & = & x - 2\,\langle x \,|a\rangle\, a - 2\,(\langle x \,|a\rangle - 2\,\langle x \,|a\rangle\,\langle a \,|a\rangle) \\ & = & x \underbrace{-2\,\langle x \,|a\rangle - 2\,\langle x \,|a\rangle + 4\,\langle x \,|a\rangle\,\underbrace{\langle a \,|a\rangle}_{=1}}_{=0} \\ & = & x \end{array}$$

Par suite, f est une symétrie vectorielle.

Comme 1 est valeur propre de f avec $E_1(f) = (\text{Vect }(a))^{\perp}$, on en déduit que l'ensemble des vecteurs invariants de E par f est $E_1(f)$.

De plus, comme $-2+1$ est valeur propre que que a est un vecteur propre associé à la valeur propre $-2+1$, on en déduit que $f(a) = -a$, et par suite l'ensemble des vecteurs de E transformés en leur opposé par f est $\text{Vect }(a)$.

Ainsi, f est la symétrie vectorielle par rapport à $(\text{Vect }(a))^{\perp}$ de direction $\text{Vect }(a)$.

On en déduit que f est une symétrie orthogonale.