Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Je m'entraîne à rédiger

EX. 1 | Réf. 0831

Soient X_1, X_2, X_3 et X_4 quatre variables aléatoires de Bernoulli que l'on suppose indépendantes, de même espérance mathématique p.
On définit alors la variable aléatoire Y par : $Y = X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 8X_4$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Déterminer les probabilités des événements :
   - **a.** $[Y < 8]$
   - **b.** $[4 \leq Y < 8]$
   - **c.** $[Y = 6]$ sachant que $[Y < 8]$
3. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 0831

1. **Support de Y :** on a $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$ où $i \in [\![1; 4]\!]$. Il existe donc $2^4 = 16$ mots binaires $(X_4X_3X_2X_1)_2$ permettant de coder les entiers de l'ensemble $[\![0; 15]\!]$.
   Or $Y = 2^3 \times X_4 + 2^2 \times X_3 + 2^1 \times X_2 + 2^0 \times X_1$, c'est à dire Y est l'écriture en base dix du mot binaire $(X_4X_3X_2X_1)_2$.
   Ainsi $Y(\Omega) = [\![0; 15]\!]$.

   Loi de Y : soit $k \in [\![0; 15]\!] = Y(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=0]) &= \mathbb{P}([X_4=0]\cap[X_3=0]\cap[X_2=0]\cap[X_1=0]) \\
&\underset{\substack{\text{Indép. de} \\ X_1,\dots,X_4}}{=} \mathbb{P}([X_4=0])\times\mathbb{P}([X_3=0])\times\mathbb{P}([X_2=0])\times\mathbb{P}([X_1=0]) \\
&= (1-p)^4 \\
\mathbb{P}([Y=1]) &= \mathbb{P}([X_4=0]\cap[X_3=0]\cap[X_2=0]\cap[X_1=1]) \\
&\underset{\substack{\text{Indép. de} \\ X_1,\dots,X_4}}{=} \mathbb{P}([X_4=0])\times\mathbb{P}([X_3=0])\times\mathbb{P}([X_2=0])\times\mathbb{P}([X_1=1]) \\
&= (1-p)^3p \\
\mathbb{P}([Y=2]) &= \mathbb{P}([X_4=0]\cap[X_3=0]\cap[X_2=1]\cap[X_1=0]) \\
&\underset{\substack{\text{Indép. de} \\ X_1,\dots,X_4}}{=} \mathbb{P}([X_4=0])\times\mathbb{P}([X_3=0])\times\mathbb{P}([X_2=1])\times\mathbb{P}([X_1=0]) \\
&= (1-p)^3p \\
\mathbb{P}([Y=3]) &= \mathbb{P}([X_4=0]\cap[X_3=0]\cap[X_2=1]\cap[X_1=1]) \\
&\underset{\substack{\text{Indép. de} \\ X_1,\dots,X_4}}{=} \mathbb{P}([X_4=0])\times\mathbb{P}([X_3=0])\times\mathbb{P}([X_2=1])\times\mathbb{P}([X_1=1]) \\
&= (1-p)^2p^2 \\
\mathbb{P}([Y=4]) &= \mathbb{P}([X_4=0]\cap[X_3=1]\cap[X_2=0]\cap[X_1=0]) \\
&\underset{\substack{\text{Indép. de} \\ X_1,\dots,X_4}}{=} \mathbb{P}([X_4=0])\times\mathbb{P}([X_3=1])\times\mathbb{P}([X_2=0])\times\mathbb{P}([X_1=0]) \\
&= (1-p)^3p \\
\mathbb{P}([Y=5]) &= \mathbb{P}([X_4=0]\cap[X_3=1]\cap[X_2=0]\cap[X_1=1]) \\
&\underset{\substack{\text{Indép. de} \\ X_1,\dots,X_4}}{=} \mathbb{P}([X_4=0])\times\mathbb{P}([X_3=1])\times\mathbb{P}([X_2=0])\times\mathbb{P}([X_1=1]) \\
&= (1-p)^2p^2 \\
\mathbb{P}([Y=6]) &= \mathbb{P}([X_4=0]\cap[X_3=1]\cap[X_2=1]\cap[X_1=0]) \\
&\underset{\substack{\text{Indép. de} \\ X_1,\dots,X_4}}{=} \mathbb{P}([X_4=0])\times\mathbb{P}([X_3=1])\times\mathbb{P}([X_2=1])\times\mathbb{P}([X_1=0]) \\
&= (1-p)^2p^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=7]) &= \mathbb{P}([X_4=0]\cap[X_3=1]\cap[X_2=1]\cap[X_1=1]) \\
&\underset{\substack{\textbf{Indép. de}\\ X_1,\dots,X_4}}{=} \mathbb{P}([X_4=0])\times\mathbb{P}([X_3=1])\times\mathbb{P}([X_2=1])\times\mathbb{P}([X_1=1]) \\
&= (1-p)p^3 \\
\mathbb{P}([Y=8]) &= \mathbb{P}([X_4=1]\cap[X_3=0]\cap[X_2=0]\cap[X_1=0]) \\
&\underset{\substack{\textbf{Indép. de}\\ X_1,\dots,X_4}}{=} \mathbb{P}([X_4=1])\times\mathbb{P}([X_3=0])\times\mathbb{P}([X_2=0])\times\mathbb{P}([X_1=0]) \\
&= (1-p)^3p \\
\mathbb{P}([Y=9]) &= \mathbb{P}([X_4=1]\cap[X_3=0]\cap[X_2=0]\cap[X_1=1]) \\
&\underset{\substack{\textbf{Indép. de}\\ X_1,\dots,X_4}}{=} \mathbb{P}([X_4=1])\times\mathbb{P}([X_3=0])\times\mathbb{P}([X_2=0])\times\mathbb{P}([X_1=1]) \\
&= (1-p)^2p^2 \\
\mathbb{P}([Y=10]) &= \mathbb{P}([X_4=1]\cap[X_3=0]\cap[X_2=1]\cap[X_1=0]) \\
&\underset{\substack{\textbf{Indép. de}\\ X_1,\dots,X_4}}{=} \mathbb{P}([X_4=1])\times\mathbb{P}([X_3=0])\times\mathbb{P}([X_2=1])\times\mathbb{P}([X_1=0]) \\
&= (1-p)^2p^2 \\
\mathbb{P}([Y=11]) &= \mathbb{P}([X_4=1]\cap[X_3=0]\cap[X_2=1]\cap[X_1=1]) \\
&\underset{\substack{\textbf{Indép. de}\\ X_1,\dots,X_4}}{=} \mathbb{P}([X_4=1])\times\mathbb{P}([X_3=0])\times\mathbb{P}([X_2=1])\times\mathbb{P}([X_1=1]) \\
&= (1-p)p^3 \\
\mathbb{P}([Y=12]) &= \mathbb{P}([X_4=1]\cap[X_3=1]\cap[X_2=0]\cap[X_1=0]) \\
&\underset{\substack{\textbf{Indép. de}\\ X_1,\dots,X_4}}{=} \mathbb{P}([X_4=1])\times\mathbb{P}([X_3=1])\times\mathbb{P}([X_2=0])\times\mathbb{P}([X_1=0]) \\
&= (1-p)^2p^2 \\
\mathbb{P}([Y=13]) &= \mathbb{P}([X_4=1]\cap[X_3=1]\cap[X_2=0]\cap[X_1=1]) \\
&\underset{\substack{\textbf{Indép. de}\\ X_1,\dots,X_4}}{=} \mathbb{P}([X_4=1])\times\mathbb{P}([X_3=1])\times\mathbb{P}([X_2=0])\times\mathbb{P}([X_1=1]) \\
&= (1-p)p^3 \\
\mathbb{P}([Y=14]) &= \mathbb{P}([X_4=1]\cap[X_3=1]\cap[X_2=1]\cap[X_1=0]) \\
&\underset{\substack{\textbf{Indép. de}\\ X_1,\dots,X_4}}{=} \mathbb{P}([X_4=1])\times\mathbb{P}([X_3=1])\times\mathbb{P}([X_2=1])\times\mathbb{P}([X_1=0]) \\
&= (1-p)p^3 \\
\mathbb{P}([Y=15]) &= \mathbb{P}([X_4=1]\cap[X_3=1]\cap[X_2=1]\cap[X_1=1]) \\
&\underset{\substack{\textbf{Indép. de}\\ X_1,\dots,X_4}}{=} \mathbb{P}([X_4=1])\times\mathbb{P}([X_3=1])\times\mathbb{P}([X_2=1])\times\mathbb{P}([X_1=1]) \\
&= p^4
\end{aligned}$$

Récapitulatif dans un tableau de loi : on peut récapituler ces résultats dans le tableau de loi suivant

$[Y=\dots]$	$(X_4X_3X_2X_1)_2$	$\mathbb{P}([Y=\dots])$	$[Y=\dots]$	$(X_4X_3X_2X_1)_2$	$\mathbb{P}([Y=\dots])$
0	0000	$(1-p)^4$	8	1000	$p(1-p)^3$
1	0001	$p(1-p)^3$	9	1001	$p^2(1-p)^2$
2	0010	$p(1-p)^3$	10	1010	$p^2(1-p)^2$
3	0011	$p^2(1-p)^2$	11	1011	$p^3(1-p)$
4	0100	$p(1-p)^3$	12	1100	$p^2(1-p)^2$
5	0101	$p^2(1-p)^2$	13	1101	$p^3(1-p)$
6	0110	$p^2(1-p)^2$	14	1110	$p^3(1-p)$
7	0111	$p^3(1-p)$	15	1111	p^4

2. a. On peut remarquer que : $[Y<8]=[X_4=0]$
Ainsi, il vient que : $\mathbb{P}([Y<8])=1-p$

b. Sur le même principe : $[4\leq Y<8]=[X_4=0]\cap[X_3=1]$.
Ainsi, par indépendance de X_3 et X_4, il vient que : $\mathbb{P}([4\leq Y<8])=p(1-p)$.

c. Par définition d'une probabilité conditionnelle :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[Y<8]}([Y=6]) &= \frac{\mathbb{P}([Y<8])\cap[Y=6]}{\mathbb{P}([Y<8])} \\
&= \frac{\mathbb{P}([Y=6])}{\mathbb{P}([Y<8])} \\
&= \frac{p^2(1-p)^2}{1-p} \\
&= p(1-p)
\end{aligned}$$

3. Y est la somme de variables aléatoires finies, donc admet une espérance et une variance.
De plus, par linéarité de l'espérance, il vient :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(8X_4 + 4X_3 + 2X_2 + X_1)\\ &= 8\mathbb{E}(X_4) + 4\mathbb{E}(X_3) + 2\mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_1)\\ &= 8p + 4p + 2p + p\\ &= 15p\end{aligned}$$
Pour la variance, puisque les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes, il vient :
$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{V}(8X_4) + \mathbb{V}(4X_3) + \mathbb{V}(2X_2) + \mathbb{V}(X_1)\\ &= 8^2\mathbb{V}(X_4) + 4^2\mathbb{V}(X_3) + 2^2\mathbb{V}(X_2) + \mathbb{V}(X_1)\\ &= 64p(1-p) + 16p(1-p) + 4p(1-p) + p(1-p)\\ &= 85p(1-p)\end{aligned}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1311

Dans cet exercice, on admet que, pour tout entier naturel k fixé et tout réel $x \in]-1;1[$, la série de terme général $\binom{n}{k}x^{n-k}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.
On lance ce dé jusqu'à obtenir un 6.
On rappelle que l'on désigne par « obtenir l'as » le fait d'obtenir la face numérotée 1 lors d'un lancer.
On désigne par X le nombre de lancers nécessaires et on désigne par Y le nombre d'as obtenus avant le premier 6.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Déterminer $Y(\Omega)$.
3. Soit $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$. Déterminer $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j])$.
4. a. Soit $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$. Déterminer $\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j])$.
   b. Déterminer la loi de Y.
   c. Soit $Z = Y + 1$. Reconnaître la loi de Z et en déduire l'espérance et la variance de Y.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1311

1. **Support de X :** on peut obtenir la face numérotée « six » dès le premier lancer, comme devoir lancer le dé indéfiniement. Ainsi $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Loi de X : on désigne par S_i : « le i^{e} lancer a donné un six ».
Soit alors $k \in X(\Omega)$. On a : $[X=k] = \begin{cases} S_1 \text{ si } k=1\\ \overline{S_1}\cap\ldots\cap\overline{S_{k-1}}\cap S_k \text{ si } k\geq 2\end{cases}$.
On peut supposer le résultat des lancers indépendants les uns des autres, de sorte que :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=k]) &= \begin{cases}\frac{1}{6} \text{ si } k=1\\ \mathbb{P}\left(\overline{S_1}\cap\ldots\cap\overline{S_{k-1}}\cap S_k\right) \text{ si } k\geq 2\end{cases}\\ &= \begin{cases}\frac{1}{6} \text{ si } k=1\\ \mathbb{P}\left(\overline{S_1}\right)\times\ldots\times\mathbb{P}\left(\overline{S_{k-1}}\right)\times\mathbb{P}(S_k) \text{ si } k\geq 2\end{cases}\\ &= \begin{cases}\frac{1}{6} \text{ si } k=1\\ \underbrace{\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{5}{6}}_{k-1 \text{ facteurs}}\times\frac{1}{6} \text{ si } k\geq 2\end{cases}\\ &= \begin{cases}\frac{1}{6} \text{ si } k=1\\ \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6} \text{ si } k\geq 2\end{cases}\\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Reconnaissance de la loi de X : on en déduit donc que X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

2. Si le six est obtenu dès le premier lancer, Y prend la valeur 0. Le fait que le six ne soit jamais obtenu, n'empêche pas d'obtenir l'as. Ainsi, $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

3. Deux cas de figures se présentent :

Si $j < i$ **:** il s'agit donc de déterminer le nombre de fois que l'on peut obtenir j lancers ayant donnés l'as lors de $i-1$ lancers. Les lancers pouvant être supposé réalisés de manière indépendantes, on en déduit que la loi conditionnelle de Y sachant l'événement $[X = i]$ est une loi binomiale, c'est à dire que : $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j]) = \binom{i-1}{j}\left(\frac{1}{5}\right)^j\left(\frac{4}{5}\right)^{i-j-1}$.

Si $j \geq i$ **:** il ne peut y avoir plus d'as que de lancers réalisés, donc $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j]) = 0$.

Ainsi, il vient : $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j]) = \begin{cases} \binom{i-1}{j}\left(\frac{1}{5}\right)^j\left(\frac{4}{5}\right)^{i-j-1} & \text{si } j < i \\ 0 \text{ si } j \geq i \end{cases}$

4. a. D'après la formule des probabilités composées, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) &= \mathbb{P}([X = i]) \times \mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j]) \\
&= \mathbb{P}([X = i]) \times \begin{cases} \binom{i-1}{j}\left(\frac{1}{5}\right)^j\left(\frac{4}{5}\right)^{i-j-1} & \text{si } j < i \\ 0 \text{ si } j \geq i \end{cases} \\
&= \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \times \frac{1}{6} \times \begin{cases} \binom{i-1}{j}\left(\frac{1}{5}\right)^j\left(\frac{4}{5}\right)^{i-j-1} & \text{si } j < i \\ 0 \text{ si } j \geq i \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \times \frac{1}{6}\binom{i-1}{j}\left(\frac{1}{5}\right)^j\left(\frac{4}{5}\right)^{i-j-1} & \text{si } j < i \\ 0 \text{ si } j \geq i \end{cases} \\
&= \begin{cases} \binom{i-1}{j}\left(\frac{1}{6}\right)^{j+1}\left(\frac{4}{6}\right)^{i-j-1} & \text{si } j < i \\ 0 \text{ si } j \geq i \end{cases}
\end{aligned}$$

b. Soit alors $j \in Y(\Omega)$. Les événements $([X = i])_{i \in X(\Omega)}$ forment un système complet d'événements de probabilités non nulles. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y = j]) &= \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])}_{=0 \text{ si } j \geq i} \\
&= \sum_{i=j+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&= \sum_{i=j+1}^{+\infty} \binom{i-1}{j}\left(\frac{1}{6}\right)^{j+1}\left(\frac{4}{6}\right)^{i-j-1} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^{j+1} \sum_{i=j+1}^{+\infty} \binom{i-1}{j}\left(\frac{4}{6}\right)^{i-j-1} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^{j+1} \sum_{i=j}^{+\infty} \binom{i}{j}\left(\frac{4}{6}\right)^{i-j} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^{j+1} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{4}{6}\right)^{j+1}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}
\end{aligned}$$

c. Support de Z : puisque $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, il vient que $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Loi de Z : soit $k \in Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

On a donc : $$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z=k]) &= \mathbb{P}([Y+1=k]) \\ &= \mathbb{P}([Y=k-1]) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{(k-1)+1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Par suite, on reconnaît que Z suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Elle admet donc une espérance et une variance qui valent respectivement :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \mathbb{V}(Z) &= \frac{1-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $Y = Z - 1$, Y admet une espérance où par linéarité de l'espérance on a : $\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(Z) - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$.

De même, puisque Z admet une variance, Y admet une variance où l'on a : $\begin{aligned} \mathbb{V}(Y) &= \mathbb{V}(Z) \\ &= 1 \end{aligned}$

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 4392

On considère une suite de lancers successifs (supposés indépendants) d'une pièce de monnaie, pour laquelle la probabilité d'apparition de « pile », noté P, est p et celle de « face », noté F, est q, avec $0 < p < 1$ et $p + q = 1$, et on s'intéresse à l'apparition de deux piles consécutifs.

Par exemple, si l'on considère les seize premiers lancers suivants :

F	P	P	F	P	P	P	F	P	F	P	P	P	P	P	F
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

deux « pile » consécutifs sont réalisés aux rangs 3, 6, 12 et 14, mais non aux rangs 7, 13 et 15 (car un « pile » ne peut pas participer à la réalisation de deux « pile » consécutifs plus d'une fois).

On notera, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'événement : « deux « pile » consécutifs sont réalisés au rang n ».
- B_n l'événement : « deux « pile » consécutifs sont pour la première fois réalisés au rang n« .
- On désigne par a_n et b_n les probabilités de ces événements A_n et B_n.

1. Calcul des probabilités a_n

a. On a bien sûr $a_1 = 0$. Calculer de plus a_2, a_3 , a_4.

b. Démontrer, pour tout nombre entier naturel n non nul : $a_{n+2} = p^2 a_n + qp^2$.

c. On pose, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = a_n - c$ où c vérifie $c = p^2 c + qp^2$.

i. Démontrer que (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

ii. En déduire, pour tout nombre entier naturel n : $a_n = \dfrac{p}{1+p}\left(p + (-p)^n\right)$.

2. Nombre moyen de réalisations de deux piles consécutifs en n lancers

Pour tout entier naturel n non nul , on note X_n la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque l'événement A_n est réalisé, et 0 sinon.

a. Préciser la loi de X_n et son espérance.

b. Que peut-on dire de la variable aléatoire X_nX_{n+1} ?

c. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_nX_{n+2}.

d. Déterminer pour tout nombre entier $k \geqslant 1$ la loi de la variable aléatoire X_{n+k} conditionnée par l'événement $X_n = 1$, c'est à dire les probabilités $\mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+k} = 0)$ et $\mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+k} = 1)$.

e. Interpréter la variable aléatoire $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
Donner un équivalent du nombre moyen m_n de réalisations de deux piles consécutifs parmi n lancers lorsque n tend vers $+\infty$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 4392

1. Calcul des probabilités a_n

a. On a bien sûr $a_1 = 0$.
$A_2 = P_1P_2$ et $a_2 = \mathrm{P}(P_1)\,\mathrm{P}(P_2) = p^2$ car les lancers sont indépendants.
$A_3 = F_1P_2P_3$ car il faut P_2P_3 et pas de pile en 1, sinon, on a deux piles de suite en P_1P_2
D'où $a_3 = qp^2$
$A_4 = (F_1F_2 \cup P_1P_2 \cup P_1F_2) \cap P_3P_4$ en listant tous les cas possibles.
C'est une réunion d'incompatibles donc $a_4 = \left(q^2 + p^2 + pq\right)p^2$
et en remarquant que $1 = (p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$ on peut le réécrire : $a_4 = (1 - pq)\,p$
Ainsi : $a_2 = p^2$: $a_3 = qp^2$: $a_4 = \left(q^2 + p^2 + pq\right)p^2$

b. On décompose l'événement A_{n+2}
Il doit se finir par $P_{n+1}P_{n+2}$ et on regarde ce qui peut les précéder :
Soit il y avait F_n, soit il y avait P_n, mais alors dans un bloc A_n. (sinon, P_{n+1} donnerait les deux piles de suite)
$A_{n+2} = P_{n+1}P_{n+2} \cap (F_n \cup A_n)$ incdépendants donc
$a_{n+2} = \mathrm{P}(P_{n+1})\,\mathrm{P}(P_{n+2})\,\mathrm{P}(F_n \cup A_n)$ incompatibles
$a_{n+2} = p^2\left(\mathrm{P}(F_n) + \mathrm{P}(A_n)\right) = p^2(q + a_n)$
Ainsi : pour tout nombre entier naturel n non nul : $a_{n+2} = p^2a_n + qp^2$.

c. On pose, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = a_n - c$ où c vérifie $c = p^2c + qp^2$.
* On calcule u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a_{n+2} - c \\ &= p^2a_n + qp^2 - \left(p^2c + qp^2\right) \\ &= p^2(a_n - c) \\ &= p^2u_n \end{aligned}$$

Ainsi : $u_{n+2} = p^2u_n$ et (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
* Son équation caractéristique est $r^2 - p^2 = 0$ de racines $\pm p$
Donc pour tout entier n, $u_n = \alpha p^n + \beta(-p)^n$ avec α et β qui sont les solutions de :

$$(1)\left\{\begin{array}{l} u_1 = \alpha p - \beta p \\ u_2 = \alpha p^2 + \beta p^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} -c = \alpha p - \beta p & \\ p^2 - c = \alpha p^2 + \beta p^2 & L_2 + pL_1 \end{array}\right. ,$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} -c = \alpha p - \beta p \\ p^2 - c - pc = 2\alpha p^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \beta = \dfrac{1}{p}(c + \alpha p) \\ \alpha = \dfrac{1}{2p^2}\left(p^2 - c - pc\right) \end{array}\right.$$

on arrange avec $c = p^2c + qp^2 \iff c = \dfrac{qp^2}{(1-p^2)} = \dfrac{qp^2}{(1-p)(1+p)} = \dfrac{p^2}{(1+p)}$ donc

$p^2 - c - pc = p^2 - \dfrac{p^2}{1+p} - \dfrac{p^3}{(1+p)} = 0$ donc

$$(1) \iff \left\{\begin{array}{l} \beta = \dfrac{1}{p}\dfrac{p^2}{(1+p)} = \dfrac{p}{1+p} \\ \alpha = 0 \end{array}\right.$$

Finalement, pour tout entier n : $u_n = \dfrac{p}{1+p}(-p)^n$ et $a_n = u_n + c = \dfrac{p}{1+p}(-p)^n + \dfrac{p^2}{1+p}$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \dfrac{p}{1+p}\left(p + (-p)^n\right)$

Remarque :

Comme a_n est donné, il peut être plus rapide de tester directement si $a_n = \frac{p}{1+p}\left(p + (-p)^n\right)$ est la solution de $a_{n+2} = p^2 a_n + qp^2$:

Récurrence à deux termes, donc hypothèse sur deux termes successifs :

- $a_1 = 0$ et $\frac{p}{1+p}\left(p + (-p)^1\right) = 0$ d'où égalité
  $a_2 = p^2$ et $\frac{p}{1+p}\left(p + (-p)^2\right) = \frac{p}{1+p}\left(p + p^2\right) = p^2$ d'où égalité.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = \frac{p}{1+p}\left(p + (-p)^n\right)$ et $a_{n+1} = \frac{p}{1+p}\left(p + (-p)^{n+1}\right)$ alors
  $a_{n+1} = \ldots$ par hypothèse de récurrence et

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= p^2 a_n + qp^2 = p^2 \frac{p}{1+p}\left(p + (-p)^n\right) + (1-p)\, p^2 \\
&= \frac{p^2}{1+p}\left[p\left(p + (-p)^n\right) + (1-p)(1+p)\right] \\
&= \frac{p^2}{1+p}\left[p^2 + p\,(-p)^n + 1 - p^2\right] \\
&= \frac{p}{1+p}\left[p^2\,(-p)^n + p\right] \quad \text{et } p^2 = (-p)^2 \text{ donc} \\
&= \frac{p}{1+p}\left[(-p)^{n+2} + p\right]
\end{aligned}$$

- Donc la prorpiété est vraie pour tout entier n.

Au final, la rédaction est toute aussi longue.

2. **Nombre moyen de réalisations de deux piles consécutifs en n lancers**

   Pour tout entier naturel n non nul , on note X_n la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque l'événement A_n est réalisé, et 0 sinon.

   a. On a X_n suit une loi de Bernouilli de paramètre $\mathrm{P}(X_n = 1) = \mathrm{P}(A_n) = a_n$ donc
   Ainsi : $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(a_n)$ et $E(X_n) = a_n$

   b. Quand A_n est réalisé, A_{n+1} ne peut pas l'être, car P_n ne peut pas reservir pour réalisé le deouble pile $P_n P_{n+1}$.
   Donc Si $X_n = 1$ alors $X_n = 0$. Et si $X_n = 0$ le produit est également nul.
   Ainsi : $X_n X_{n+l} = 0$

   c. $X_n X_{n+2}$ prend les valeurs 0 et 1. Il ne vaut 1 que si les deux variables prennent cette valeur.
   $(X_n = 1) \cap (X_{n+2} = 1) = (X_n = 1) \cap (P_{n+1} P_{n+2})$ ca rle P_{n+1} n'entre pas dans le double pécédent.
   et comme les tirages $(n-1, n)$ et $(n+1, n+2)$ sont indépendants,
   $\mathrm{P}\left[(X_n = 1) \cap (X_{n+2} = 1)\right] = \mathrm{P}(X_n = 1)\, p^2 = p^2 a_n$
   Ainsi : $X_n X_{n+2}.\hookrightarrow \mathcal{B}\left(p^2 a_n\right)$

   d. Interprètation :
   quand $X_n = 1$, on a eu un doublé $P_{n-1} P_n$ donc il n'y aura pas de doublé entre P_n et P_{n+1}.
   On se retrouve donc dans la situtation initiale avec un décalage de n lancers.
   La loi de la variable aléatoire X_{n+k} conditionnée par l'événement $X_n = 1$, est donc la même que celle de X_k
   Ainsi : $\mathrm{P}_{X_n=1}(X_{n+k} = 1) = a_k$ et $\mathrm{P}_{X_n=1}(X_{n+k} = 0) = 1 - a_k$

   e. Interprètation classique : somme de variables de Bernouilli.
   X_k est le nombre de doublé (0 ou 1) pour le lancer k.
   $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ est le nombre total de doublés en n lancers.
   Le nombre moyen m_n de réalisations de deux piles consécutifs parmi n lancers est donc

$$\begin{aligned}
m_n &= E\left(X_1 + \cdots + X_n\right) \\
&= E(X_1) + \cdots + E(X_n) \\
&= a_1 + \cdots + a_n
\end{aligned}$$

   Reste à trouver un équivalent simple de cette somme.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{p}{1+p}\sum_{k=1}^{n}\left(p+(-p)^k\right)\\ &= \frac{p}{1+p}\left[\sum_{k=1}^{n} p+\sum_{k=1}^{n}(-p)^k\right]\\ &= \frac{p}{1+p}\left[np+\frac{1+(-p)^{n+1}}{1-p}\right] \text{ et } np \text{ prépondérant dans } []\\ &= \frac{np^2}{1+p}\left[1+\frac{1+(-p)^{n+1}}{(1-p)\,np}\right]\end{aligned}$$

et comme $\dfrac{1+(-p)^{n+1}}{1-p} \to 1$ alors $[] \to 1$ et $\sum_{k=1}^{n} a_k \sim \dfrac{np^2}{1+p}$

Ainsi : $m_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{np^2}{1+p}$