À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [5242] | 1| ENSAI 2013 Filière BL

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est la matrice

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&-1\\0&2&0\end{pmatrix}$$

(1). Montrer que $f^3=\tilde{0}$ où $\tilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$.

(2). f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

(3). Montrer que la famille $\mathcal{C}=\left(f^2(e_3),f(e_3),e_3\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(4). Donner la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$.

(5). La matrice A est-elle diagonalisable ?

Éléments de correction

(1). Il est immédiat que $A^2=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&0&0\\4&0&-2\end{pmatrix}$ puis que $A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Or la matrice de f^3 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est exactement A^3, et donc f^3 est bien l'endomorphisme nul.

(2). D'après le théorème de caractérisation des automorphismes par leur représentation matricielle, f est un automorphisme si, et seulement si, le rang d'une de ses représentations matricielle, ici la matrice A, est inversible, c'est à dire de rang 3.

Il est clair que la première colonne et la dernière colonne de A sont proportionnelles, donc A n'est pas inversible, et par suite, f n'est pas un automorphisme.

(3). Supposons que l'on ait : $(\star):\ \alpha_2 f^2(e_3)+\alpha_1 f(e_3)+\alpha_0 e_3=\overrightarrow{0}$ où $(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_0)\in\mathbb{R}^3$.

En composant $(\star)$ par f^2 et par linéarité de f, il vient que : $\alpha_2\underbrace{f^4(e_3)}_{\overrightarrow{0}}+\alpha_1\underbrace{f^3(e_3)}_{=\overrightarrow{0}}+\alpha_0 f^2(e_3)=\overrightarrow{0}$.

Par suite, il vient que $\alpha_0 f^2(e_3)=\overrightarrow{0}$.

Or $f^2(e_3)$ est à la représentation près la matrice colonne $A^2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}$ qui est non nul, et on en déduit ainsi que $\alpha_0=0$.

$(\star)$ devient alors : $(\star)\ \alpha_2 f^2(e_3)+\alpha_1 f(e_3)=\overrightarrow{0}$.

En composant alors avec f et par linéarité de f, il vient : $\alpha_2\underbrace{f\left(^3\right)e_3,}_{=\overrightarrow{0}}+\alpha_1\underbrace{f^2(e_3)}_{\neq\overrightarrow{0}}=\overrightarrow{0}$

ce qui assure que $\alpha_1=0$, et que $(\star)$ se réduit alors à $\alpha_2\underbrace{f^2(e_3)}=\overrightarrow{0}$ qui amène alors à $\alpha_2=0$.

Par conséquent, il vient que $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=0$ ce qui assure le caractère libre de la famille $\mathcal{C}$.

Il s'agit alors d'une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, par théorème, $\mathcal{C}$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(4). Il est clair que : $\left\{\begin{array}{rcl} f\left(f^2(e_3)\right) & = & f^3(e_3)\\ & = & \overrightarrow{0}\\ f\left(f(e_3)\right)= & = & f^2(e_3)\\ f(e_3) & = & f(e_3)\end{array}\right.$

et donc par construction d'une matrice dans une base donnée, il vient que $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(5). Les matrices A et A' sont semblables d'après les formules de changement de bases, et par conséquent possèdent les mêmes valeurs propres. La matrice A' étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont ses termes diagonaux, et donc le spectre de A se réduit à la seule valeur propre 0, et par conséquent, A ne peut être diagonalisable, car si c'était le cas, elle sera semblable à la matrice nulle, donc nulle, ce qui n'est pas le cas.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5241] | 2| Extrait ENS 2020 Filière D2

Cet exercice s'intéresse à l'étude d'endomorphismes spécifiques de $\mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ et si $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$, on rappelle que la puissance n-e où $n \in \mathbb{N}$ d'un endomorphisme est définie par

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$$

avec la convention que $f^0 = \mathrm{Id}$ et $f^1 = f$.
Un endomorphisme est dit nilpotent lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = \tilde{0}$ où $\tilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$. On définit alors l'indice de nilpotence p^* de f par : $p^* = \min\left\{p \in \mathbb{N}^*,\ f^p = \tilde{0}\right\}$. Il s'agit donc du plus petit entier positif tel que f^p est l'endomorphisme nul.

De même, une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel qie $M^p = (0)$ où (0) désigne la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et on définit de manière similaire l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente.

Dans tout ce qui suit, on désigne par N_1 et N_2 les deux matrices suivantes :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et par f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ non nul dont on note p^* son indice de nilpotence.

(1). Montrer que N_1 et N_2 sont nilpotentes et préciser leur indice de nilpotence.

(2). Justifier qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $f^{p^*-1}(x_0) \neq \overrightarrow{0}$.

(3). Montrer que la famille $\mathcal{F} = \left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p^*-1}(x_0)\right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

(4). En déduire que $p^* \leq 3$.

(5). On suppose dans cette question que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ et l'objectif de cette question est de montrer que $p^* = 3$. On raisonne par l'absurde en supposant donc que $p^* = 2$.

- **(a).** Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
- **(b).** En déduire une absurdité et conclure.
- **(c).** Justifier que la famille $\left(x_0, f(x_0), f^2(x_0)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- **(d).** En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est N_2.

(6). Montrer que lorsque $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$, il existe une base dans laquelle la matrice de f est N_1.

Éléments de correction

(1). Un calcul direct donne que : $N_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc que N_1 est nilpotente d'indice 1.

De même on trouve que $N_2^2 = N_1$ et donc que $N_2^2 = (0)$ ce qui assure que N_2 est nilpotente d'indice 2.

(2). Si un tel x_0 n'existait pas, cela signifierait que : $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f^{p^*-1}(x) = \overrightarrow{0}$
c'est à dire que f^{p^*-1} est nulle, ce qui est contradictoire avec la définition de l'ordre de nilpotence.

(3). Supposons que l'on ait $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{p^*-1}) \in \mathbb{R}^{p^*}$ tel que : $(\star)$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{p^*-1} \alpha_k f^k(x_0) = \overrightarrow{0}$ avec la convention $f^0(x_0) = x_0$.

En composant $(\star)$ par f^{p^*-1}, il vient que : $\alpha_0 f^{p^*-1}(x_0) + f^{p^*-1}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{p^*-1} \alpha_k f^k(x_0)\right) = \overrightarrow{0}$

ce qui donne : $\alpha_0 f^{p^*-1}(x_0) + \displaystyle\sum_{k=1}^{p^*-1} \alpha_k \underbrace{f^k + p^* - 1(x_0)}_{=\overrightarrow{0}} = \overrightarrow{0}$

et comme $f^{p^*-1,x_0} \neq \overrightarrow{0}$, il vient que $\alpha_0 = 0$

Par conséquent $(\star)$ devient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p^*-1} \alpha_k f^k(x_0) = \overrightarrow{0}$.

On compose alors par f^{p^*-2} pour obtenir $\alpha_1 = 0$, puis par f^{p^*-3} pour obtenir $\alpha_2 = 0$ et ainsi de suite pour obtenir avec une dernière composition par f que $\alpha_{p^*-2} = 0$ et il restera alors $\alpha_{p^*-1} f^{p^*-1}(x_0) = \overrightarrow{0}$ qui donnera alors $\alpha_{p^*-1} = 0$.
Par suite, la famille est bien libre.

(4). La famille $\mathcal{F}$ est donc une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Elle possède donc au plus $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs, donc comme elle est formée de p^* vecteurs, on en déduit que $p^* \leq 3$.

(5).(a). Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe donc $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x) = y$. Ainsi, il vient que $f(y) = f^2(x)$ et puisque par hypothèse $p^* = 2$, on déduit que $F^2(x) = \overrightarrow{0}$ ce qui assure que $f(y) = \overrightarrow{0}$ et donc que $y \in \mathrm{Ker}(f)$.
On en déduit donc que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

(b). On en déduit donc que : $\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) \leq 2$
Or d'après le théorème du rang, on doit avoir que $3 = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$, ce qui est contradictoire, et par suite, $p^* = 3$.

(c). Supposons que l'on ait : $(\star) : \alpha_2 f^2(x_0) + \alpha_1 f(x_0) + \alpha_0 x_0 = \overrightarrow{0}$ où $(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0) \in \mathbb{R}^3$.
En composant $(\star)$ par f^2 et par linéarité de f, il vient que : $\alpha_2 \underbrace{f^4(x_0)}_{\overrightarrow{0}} + \alpha_1 \underbrace{f^3(x_0)}_{=\overrightarrow{0}} + \alpha_0 f^2(x_0) = \overrightarrow{0}$.

Par suite, il vient que $\alpha_0 \underbrace{f^2(x_0)}_{\neq\overrightarrow{0}} = \overrightarrow{0}$, et donc que $\alpha_0 = 0$.

$(\star)$ devient alors : $(\star)\ \alpha_2 f^2(x_0) + \alpha_1 f(x_0) = \overrightarrow{0}$.
En composant alors avec f et par linéarité de f, il vient : $\alpha_2 \underbrace{f\left(^3\right) x_0,}_{=\overrightarrow{0}} + \alpha_1 \underbrace{f^2(x_0)}_{\neq\overrightarrow{0}} = \overrightarrow{0}$

ce qui assure que $\alpha_1 = 0$, et que $(\star)$ se réduit alors à $\alpha_2 \underbrace{f^2(x_0)}_{} = \overrightarrow{0}$ qui amène alors à $\alpha_2 = 0$.

Par conséquent, il vient que $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ce qui assure le caractère libre de la famille $\mathcal{F}$.
Il s'agit alors d'une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, par théorème, $\mathcal{F}$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(d). Il est clair que : $\begin{cases} f\left(f^2(x_0)\right) & = & f^3(x_0) \\ & = & \overrightarrow{0} \\ f(f(x_0)) = & = & f^2(x_0) \\ f(x_0) & = & f(x_0) \end{cases}$
et donc par construction d'une matrice dans une base donnée, il vient que la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N_2$.

(6). On ne peut avoir dans ce cas $p^* = 3$, car sinon, la famille $\mathcal{F} = \left(x_0, f(x_0), f^2(x_0)\right)$ étant une famille libre, la sous-famille $\mathcal{F}' = \left(f(x_0), f^2(x_0)\right)$ est encore libre, et donc $\mathrm{rg}(f) \geq 2$, ce qui en raison du théorème du rang, est impossible puisque $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$ par hypothèse.
Ainsi, $p^* = 2$, et sur le même principe que précédemment, on a encore $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Soit alors $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $w \notin \mathrm{Ker}(f)$, qui existe puisque $\mathrm{Ker}(f) \subsetneq \mathbb{R}^3$.

On note alors $v = f(w) \in \mathrm{Im}(f)$, et on a clairement que $v \neq \overrightarrow{0}$ car sinon $w \in \mathrm{Ker}(f)$. Par l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ donne que $v \in \mathrm{Ker}(f)$.

D'après le théorème de la base incomplète, il existe donc $u \neq \overrightarrow{0}$ avec $u \in \mathrm{Ker}(f)$ tel que (u, v) soit une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Montrons alors que la famille $\mathcal{C}' = (u, v, w)$ est base de $\mathbb{R}^3$.

Supposons que l'on ait $au + bv + cw = \overrightarrow{0}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

En composant par f, et par linéarité de f, il vient que : $a\underbrace{f(u)}_{=\overrightarrow{0}} + b\underbrace{f(v)}_{=\overrightarrow{0}} + c\underbrace{f(w)}_{\neq\overrightarrow{0}} = \overrightarrow{0}$

et donc que $c = 0$.

Ainsi, on a que $au + bv = \overrightarrow{0}$ et comme la famille (u, v) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, c'est une famille libre, et donc $a = b = 0$.

Finalement, puisque $a = b = c = 0$, on en déduit que $\mathcal{C}'$ est une famille libre.

Il s'agit alors d'une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, par théorème, $\mathcal{F}$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Par construction, on a : $\left\{\begin{array}{ccc} f(u) & = & = \overrightarrow{0} \\ f(v) & = & \overrightarrow{0} \\ f(w) & = & v \end{array}\right.$

et donc la matrice de f dans la base $\mathcal{C}'$ est donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N_1$.