À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [3245] | 1| Suites géométriques

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par les relations : $\begin{cases} u_0 &= \dfrac{2}{3} \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} &= \dfrac{u_n}{2}+\dfrac{n}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

(1). On considère alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général v_n est défini par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n = u_n\sqrt{2}-n.$$

(a). Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on identifiera les éléments caractéristiques.

(b). En déduire une expression de v_n en fonction de n.

(2). Déduire des questions précédentes, une expression de u_n en fonction de n.

(3). Que vaut alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}$?

Éléments de correction

(1).(a). On a directement que :

$$\begin{aligned} \forall n\in\mathbb{N},\quad v_{n+1} &= u_{n+1}\sqrt{2}-(n+1) \\ &= \left(\frac{u_n}{2}+\frac{n}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}-(n+1) \\ &= \frac{u_n}{\sqrt{2}}+\frac{n}{2}+1-n-1 \\ &= \frac{u_n}{\sqrt{2}}+\frac{n}{2}-n \\ &= \frac{u_n}{\sqrt{2}}-\frac{n}{2} \\ &= \frac{u_n\sqrt{2}}{2}-\frac{n}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(u_n\sqrt{2}-n\right) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

Par suite, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terne $v_0 = u_0\sqrt{2}-0$ c'est à dire $v_0 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

(b). On en déduit directement que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n = \dfrac{\sqrt{2}}{3\times 2^{n-1}}$

(2). Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $v_n = u_n\sqrt{2}-n$, on en déduit que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = \dfrac{1}{3\times 2^{n-1}}+\dfrac{n}{\sqrt{2}}$.

(3). Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3\times 2^{k-1}}+\frac{k}{\sqrt{2}}\right)\\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{n}k\\
&= \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}+\frac{n(n+1)}{2\sqrt{2}}\\
&= \frac{2}{3}\times\frac{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}+\frac{n(n+1)\sqrt{2}}{4}\\
&= \frac{4}{3}\times\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}+\frac{n(n+1)\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5173] | 2| Matrices et polynômes

On considère les deux matrices A et B données par :

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\ \text{ et } B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(1). Calculer B^2 et B^3, puis en déduire B^k pour tout $k\geq 3$.

(2). Pour tout $N\in\mathbb{N}$, exprimer A^N à l'aide de I_3, B et B^2.

(3). Soient $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $(a_0,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ et P la fonction définie par : $P:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ x&\longmapsto&\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\end{array}\right.$.

On définit alors la matrice $P(A)$ par : $\quad P(A)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kA^k$ où $A^0=\mathrm{I}_3$.

(a). Déterminer $P'(x)$ et $P''(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis exprimer à l'aide d'une somme $P'(2)$ et $P''(2)$.

(b). Montrer alors que : $\quad P(A)=\begin{pmatrix}P(2)&P'(2)&\frac{1}{2}P''(2)\\0&P(2)&P'(2)\\0&0&P(2)\end{pmatrix}$.

(c). Exprimer $P(A)$ dans le cas où $P:x\longmapsto 2x^2-x+2$.

Éléments de correction

(1). Un calcul direct donne que $B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ puisque $B^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Ce qui assure que : $\quad\forall k\geq 3,\ B^k=(0)$.

(2). On remarque immédiatement que $A=2\mathrm{I}_3+B$ et il est clair que $(2\mathrm{I}_3)\,B=B\,(2\mathrm{I}_3)$ ce qui assure que l'on peut utiliser le binôme de Newton.

Pour $N \geq 2$ **:** on a :
$$\begin{aligned} A^N &= (2\mathrm{I}_3+B)^k \\ &= \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}(2\mathrm{I}_3)^{N-k}B^k \\ &= \sum_{k=0}^{2}\binom{N}{k}(2\mathrm{I}_3)^{N-k}B^k \\ &= \sum_{k=0}^{2}\binom{N}{k}(2)^{N-k}\mathrm{I}_3B^k \\ &= \sum_{k=0}^{2}\binom{N}{k}(2)^{N-k}B^k \\ &= \binom{N}{0}2^{N-0}B^0+\binom{N}{1}2^{N-1}B^1+\binom{N}{2}2^{N-2}B^2 \\ &= 2^N\mathrm{I}_3+N2^{N-1}B+\frac{N(N-1)2^{N-2}}{2}B^2 \end{aligned}$$

Pour $N=1$ **:** on a trivialement que $A=2\mathrm{I}_3+B$ et la formule précédente reste encore valable.

Pour $N=0$ **:** on a trivialement que $A^0=\mathrm{I}_3$ et la formule précédente reste encore valable.

Ainsi : $\forall N\in\mathbb{N},\ A{=}2^N\mathrm{I}_3+N2^{N-1}B+\dfrac{N(N-1)2^{N-2}}{2}B^2.$

(3).(a). La fonction P est clairement une fonction polynôme, donc indéfiniement dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall x\in\mathbb{R},\ P(x) &= \sum_{k=0}^{N}a_kx^k \\ P'(x) &= \sum_{k=0}^{N}ka_kx^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{N}ka_kx^{k-1} \\ P''(x) &= \sum_{k=1}^{N}k(k-1)a_kx^{k-2} \\ &= \sum_{k=2}^{N}k(k-1)a_kx^{k-2} \end{aligned}$$

On en déduit alors que :
$$\begin{aligned} P'(2) &= \sum_{k=1}^{N}ka_k2^{k-1} \\ P''(2) &= \sum_{k=2}^{N}k(k-1)a_k2^{k-2} \end{aligned}$$

(b). En revenant à la définition de $P(A)$, on a :

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^{N}a_kA^k \\ &= \sum_{k=0}^{N}a_k\left(2^k\mathrm{I}_3+k2^{k-1}B+\frac{k(k-1)}{2}2^{k-2}B^2\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{N}a_k2^k\mathrm{I}_3\right)+\left(\sum_{k=0}^{N}a_kk2^{k-1}NB\right)+\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{k(k-1)}{2}2^{k-2}B^2\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{N}a_k2^k\mathrm{I}_3\right)+\left(\sum_{k=1}^{N}a_kk2^{k-1}NB\right)+\left(\sum_{k=2}^{N}\frac{k(k-1)}{2}2^{k-2}B^2\right) \\ &= \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{N}a_k2^k\right)}_{=P(2)}\mathrm{I}_3+\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{N}a_kk2^{k-1}N\right)}_{=P'(2)}B+\underbrace{\left(\sum_{k=2}^{N}\frac{k(k-1)}{2}2^{k-2}\right)}_{=P''(2)}B^2 \\ &= P(2)\mathrm{I}_3+P'(2)B+P''(2)B^2 \end{aligned}$$

et il est alors immédiat que $P(A) = \begin{pmatrix} P(2) & P'(2) & \frac{1}{2}P''(2) \\ 0 & P(2) & P'(2) \\ 0 & 0 & P(2) \end{pmatrix}$.

(c). Puisque $P : x \longmapsto 2x^2 - x + 2$, il vient que $P'(x) = 4x - 1$ et $P''(x) = 4$. Ainsi, $P(A) = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.