Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . . **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 4097

On considère l'application Ψ définie par :

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \longmapsto & (P(0), P'(0), P''(0), P'''(0)) \end{array} \right.$$

1. Montrer que Ψ est un isomorphisme.

2. Déterminer le polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ qui vérifie $\Psi(P) = (-1, 1, -1, 1)$.

EX. 2 | Réf. 0909

Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & \alpha \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Calculer son inverse dans ce cas.

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 4488

1. Résoudre l'équation $(\star)$: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On notera $\lambda_1 < \lambda_2$ les solutions obtenues.

2. Donner un exemple de matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(\diamond)$: $A^2 - A - 2\mathrm{I}_n = (0)$.

3. On fixe une telle matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on définit :

$$P = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(A - \lambda_1 \mathrm{I}_n\right) \text{ et } Q = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(A - \lambda_2 \mathrm{I}_n\right)$$

Montrer que $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$.

4. Calculer $P + Q$, PQ et QP, puis exprimer A comme combinaison linéaire de P et Q.

5. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$A^p = \frac{1}{3}\left(2^p + (-1)^{p+1}\right) A + \frac{2}{3}\left(2^{p-1} + (-1)^p\right) \mathrm{I}_n$$

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 4494

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données par $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & u_n + \frac{2}{3}v_n - \frac{4}{3}w_n \\ v_{n+1} & = & -3u_n + \frac{5}{3}v_n + \frac{5}{3}w_n \\ w_{n+1} & = & -\frac{3}{2}u_n + \frac{2}{3}v_n + \frac{7}{6}w_n \end{array} \right.$$

On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier qu'il existe un unique $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X_0 = aC_1 + bC_2 + cC_3$.
2. Déterminer $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer AC_1, AC_2 et AC_3.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = a\left(\frac{5}{2}\right)^n C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^n C_3$

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 4497

On désigne par $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies par :

$$f_1 : x \longmapsto \left(\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,-x}\right)\cos(x),\ f_2 : x \longmapsto \left(\mathrm{e}^{\,x} - \mathrm{e}^{\,-x}\right)\cos(x),\ f_3 : x \longmapsto \left(\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,-x}\right)\sin(x),\ f_4 : x \longmapsto \left(\mathrm{e}^{\,x} - \mathrm{e}^{\,-x}\right)\sin(x)$$

On note $F = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une famille libre. Qu'en déduire pour F ?
2. Montrer que l'application $\varphi : \left|\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}\right.$ est linéaire.

   Est-ce un endomorphisme de F ?
3. Écrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ de F.
4. Est-ce que φ est un automorphisme de F ?