Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . . **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 3738

On se propose dans cet exercice de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E) : \qquad y'' - 3y' + 2y = 2\,(\sin(x))^3$$

1. **Question préliminaire :** à l'aide des formules d'Euler, linéariser $(\sin(x))^3$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation homogène (E_H) associée à (E).
3. Déterminer à l'aide du principe de superposition des solutions, une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 3737

On se propose dans cet exercice de résoudre sur $]1;+\infty[$ l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E) : \qquad \left(x^2-1\right) y' - y = x^2$$

1. **Question préliminaire :** on considère $\Phi : \left|\begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x \frac{t^2}{(t-1)\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$ où $a \in \,]1;+\infty[$.
   a. Calculer la dérivée sur $]1;+\infty[$ de la fonction $u : t \longmapsto \sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}$.
   b. Montrer à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}$ que :
   $$\forall x \in \,]1;+\infty[\,, \quad \Phi(x) = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + (1+x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + K$$
   où K est une constante réelle dépendant de a
2. Montrer que les solutions de l'équation homogène (E_H) associée à (E) sur $]1;+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \lambda\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer une solution particulière de (E) sur $]1;+\infty[$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]1;+\infty[$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 3736

On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation différentielle non linéaire $(\star)$ suivante :

$$(\star) : \qquad yy' = xy^2 + 1$$

1. Montrer que la fonction z définie par $z(x) = (y(x))^2$ vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre (E) que l'on résoudra sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire les solutions de l'équation $(\star)$.

EX. 4 | Réf. 3735

On cherche à déterminer l'ensemble des solutions en fonction d'un paramètre réel m de l'équation différentielle (E_m) où :

$$(E_m): \qquad y'' - (m+1)y' + my = \mathrm{e}^{x} - x - 1$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H_m) associée à (E_m) en distinguant les cas $m = 1$ et $m \neq 1$.

2. Déterminer une solution particulière de l'équation (E_m) en distinguant les cas $m = 1$, $m = 0$ et $m \notin \{0, 1\}$.

3. Déterminer l'ensemble des solutions en fonction du paramètre m de l'équation différentielle (E_m).

EX. 5 | Réf. 3739

Soit φ une application dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle :

$$(E): \qquad \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) y'(x) + y(x) = \varphi(x)$$

1. On note G et F les applications de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{t} \varphi(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \frac{G(x)}{\mathrm{e}^{x} - 1}$$

a. Montrer que G et F sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. i. Déterminer le développement limité de G au voisinage de 0 à l'ordre 2 en fonction de $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.

En déduire que : $\quad F(x) = \varphi(0) + \dfrac{x}{2}\varphi'(0) + \underset{x \to 0}{o}(x)$.

ii. En déduire que F est prolongeable par continuité en 0.

On notera encore F la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $F(0)$, puis montrer que F est dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.

c. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle homogène (E_0) associée à (E) :

$$(E_0): \quad \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) y'(x) + y(x) = 0$$

Indication : on pourra remarquer que (E_0) est équivalente à $y'(x) + \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} - 1} y(x) = 0$.

d. Montrer que F vérifie (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

e. i. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

ii. Vérifier que F est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ possédant une limite finie quand x tend vers 0.

f. La fonction F est-elle solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$?

2. On suppose pour la suite de l'exercice que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$

a. i. Déterminer explicitement $F(x)$.

ii. Donner un développement limité de F à l'ordre 2 au voisinage de 0.

iii. Dresser le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}_+$.

b. On note Φ la primitive de F sur $\mathbb{R}_+$ et s'annulant en 0.

i. Montrer que : $\quad \forall x \geq 4, \quad x \leq \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1$, puis que : $\quad \forall x \geq 4, \quad F(x) \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1} \leq \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

En déduire que la fonction Φ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

ii. Étudier les variations de Φ sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que $\Phi(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.