Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [0909] | 1| Condition d'inversibilité

Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & \alpha \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Calculer son inverse dans ce cas.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4494] | 2| Suites imbriquées

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données par $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n + \frac{2}{3}v_n - \frac{4}{3}w_n \\ v_{n+1} & = & -3u_n + \frac{5}{3}v_n + \frac{5}{3}w_n \\ w_{n+1} & = & -\frac{3}{2}u_n + \frac{2}{3}v_n + \frac{7}{6}w_n \end{array} \right.$$

On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(1). Justifier qu'il existe un unique $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X_0 = aC_1 + bC_2 + cC_3$.

(2). Déterminer $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3). Calculer AC_1, AC_2 et AC_3.

(4). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = a\left(\frac{5}{2}\right)^n C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^n C_3$