Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 4681

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible, puis en déterminer son inverse.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4681

- La matrice $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ est inversible dès lors que son rang est égal à 4. On commencera donc par déterminer son rang pour justifier l'inversibilité.
- Pour la rechercher de l'inverse de A, on travaillera alors avec la matrice augmentée $(A|\mathrm{I}_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ que l'on échelonnera en lignes pour y lire sur la partie droite de la matrice augmentée, l'inverse de A.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4682

On considère l'application $\Phi : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & \Phi(P) = \left(X^2-1\right)P'' + 2XP' \end{array} \right.$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Montrer que $\Phi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.

2. Montrer que l'application Φ est linéaire.

3. Que peut-on conclure pour Φ ?

4. On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2, X^3\right)$.

- **a.** Déterminer les images par Φ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
- **b.** En déduire la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
- **c.** Φ est-il un automorphisme ?

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4682

1. On pourra soit écrire P sous la forme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et expliciter son image $\Phi(P)$ puis en déterminer le degré, soit utiliser les propriétés opératoires sur les degrés des polynômes.

2. On pourra poser $R = \lambda P + Q$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X]$ puis montrer que $\Phi(R) = \lambda\Phi(P) + \Phi(Q)$, en utilisant notamment la linéarité de la dérivation.

3. Φ est donc une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$, c'est donc un ...morphisme.

4.
- **a.** Il s'agit donc de déterminer $\Phi(1)$, $\Phi(X)$, $\Phi\left(X^2\right)$ et $\Phi\left(X^3\right)$.
- **b.** On reviendra à la définition de ce qu'est la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée.
- **c.** On observera attentivement les colonnes de cette matrice pour en déduire une information sur le caractère bijectif de Φ.