Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 3738

On se propose dans cet exercice de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E): \qquad y'' - 3y' + 2y = 2\left(\sin(x)\right)^3$$

1. **Question préliminaire :** à l'aide des formules d'Euler, linéariser $\left(\sin(x)\right)^3$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation homogène (E_H) associée à (E).
3. Déterminer à l'aide du principe de superposition des solutions, une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3738

1. On rappelle que $\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2\mathrm{i}}$ et on développe ensuite le $\left(\sin(x)\right)^3$ à l'aide du binôme de Newton en regroupant ensuite les termes pour retrouver des sinus ou cosinus.
2. On reconnaît ici une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Il reste donc à résoudre l'équation caractéristique associée, puis mettre en forme les solutions pour l'équation homogène associée.
3. On remarque que le second membre se présente sous forme d'une somme dont on analyse la forme de chaque terme pour chercher une solution particulière sous la bonne forme.
4. On met simplement en forme les solutions de l'équation à l'aide des solutions de l'équation homogène et de la solution particulière trouvée.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 3737

On se propose dans cet exercice de résoudre sur $]1;+\infty[$ l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E): \qquad \left(x^2-1\right)y' - y = x^2$$

1. **Question préliminaire :** on considère $\Phi : \left| \begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x \frac{t^2}{(t-1)\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ où $a \in]1;+\infty[$.

   a. Calculer la dérivée sur $]1;+\infty[$ de la fonction $u : t \longmapsto \sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}$.

   b. Montrer à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}$ que :

   $$\forall x \in]1;+\infty[, \quad \Phi(x) = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + (1+x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + K$$

   où K est une constante réelle dépendant de a

2. Montrer que les solutions de l'équation homogène (E_H) associée à (E) sur $]1;+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \lambda\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Déterminer une solution particulière de (E) sur $]1;+\infty[$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]1;+\infty[$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3737

1. **a.** On reconnaît ici une fonction de la forme $\sqrt{u}$ qu'il s'agit de dériver...

   b. On n'oublie pas de gérer les bornes de l'intégrale lors du changement de variables et on se sert de la question préliminaire. Il peut être intéressant d'exprimer t en fonction de u.

   Le coup de pouce... $$\left(\frac{(t^2+1)}{(1-t^2)\,t^2}\right)^2 = \frac{1}{t+1}+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{1}{(t+1)^2}$$
2. On pensera à mettre l'équation sous forme résolue, puis à remarquer que $\dfrac{1}{x^2-1} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ pour primitiver...
3. On utilisera la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière, en se servant bien évidemment de la question préliminaire.
4. Il suffit de mettre en forme les solutions.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 3736

On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation différentielle non linéaire $(\star)$ suivante :

$$(\star): \qquad yy' = xy^2+1$$

1. Montrer que la fonction z définie par $z(x) = (y(x))^2$ vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre (E) que l'on résoudra sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire les solutions de l'équation $(\star)$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3736

EX. 4 | Réf. 3735

On cherche à déterminer l'ensemble des solutions en fonction d'un paramètre réel m de l'équation différentielle (E_m) où :

$$(E_m): \qquad y''-(m+1)y'+my = \mathrm{e}^{\,x}-x-1$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H_m) associée à (E_m) en distinguant les cas $m=1$ et $m\neq 1$.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation (E_m) en distinguant les cas $m=1$, $m=0$ et $m\notin\{0,1\}$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions en fonction du paramètre m de l'équation différentielle (E_m).

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3735

1. On reconnaît que l'on a affaire à une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dont l'équation caractéristique dépend de m, et de fait son discriminant aussi...ce qui explique les discussions à mener pour obtenir la forme des solutions de l'équation homogène.
2. On utilisera le principe de superposition des solutions pour obtenir une solution particulière.
3. On met en forme les solutions de l'équation différentielle à l'aide des deux questions précédentes, en essayant d'être très structuré sur la mise en forme des réponses.

EX. 5 | Réf. 3739

Soit φ une application dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \qquad \left(1-\mathrm{e}^{-x}\right) y'(x) + y(x) = \varphi(x)$$

1. On note G et F les applications de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G(x) = \int_0^x \mathrm{e}^t \varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \frac{G(x)}{\mathrm{e}^x - 1}$$

a. Montrer que G et F sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. **i.** Déterminer le développement limité de G au voisinage de 0 à l'ordre 2 en fonction de $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.
En déduire que : $F(x) = \varphi(0) + \dfrac{x}{2}\varphi'(0) + \underset{x\to 0}{o}(x)$.

ii. En déduire que F est prolongeable par continuité en 0.
On notera encore F la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $F(0)$, puis montrer que F est dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.

c. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle homogène (E_0) associée à (E) :

$$(E_0) : \quad \left(1-\mathrm{e}^{-x}\right) y'(x) + y(x) = 0$$

Indication : on pourra remarquer que (E_0) est équivalente à $y'(x) + \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} y(x) = 0$.

d. Montrer que F vérifie (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

e. **i.** Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

ii. Vérifier que F est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ possédant une limite finie quand x tend vers 0.

f. La fonction F est-elle solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$?

2. On suppose pour la suite de l'exercice que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$

a. **i.** Déterminer explicitement $F(x)$.

ii. Donner un développement limité de F à l'ordre 2 au voisinage de 0.

iii. Dresser le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}_+$.

b. On note Φ la primitive de F sur $\mathbb{R}_+$ et s'annulant en 0.

i. Montrer que : $\forall x \geq 4, \quad x \leq \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1$, puis que : $\forall x \geq 4, \quad F(x) \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1} \leq \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

En déduire que la fonction Φ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

ii. Étudier les variations de Φ sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que $\Phi(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3739

1. **a.** On dispose d'un théorème - voir son cours d'intégration - pour justifier le caractère $\mathcal{C}^1$ de G, celui de F s'en déduit par opérations.

b. **i.** On écrit le $DL_1(0)$ de $t \longmapsto \mathrm{e}^t$ puis celui de $t \longmapsto \varphi(t)$ à l'aide de la formule de Taylor-Young, puis on primitive le produit de ces deux développements pour avoir le $DL_2(0)$ souhaité. Pour celui de F, il est alors nécessaire de faire celui de $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$.

ii. On exploite le $DL_1(0)$ obtenu précédemment pour répondre à la question.

c. On reconnaît alors une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont la résolution repose sur une recherche de primitive.

d. On calcule $F'(x)$ et on reporte dans (E) pour s'assurer que F satisfait l'équation différentielle (E).

e. **i.** On met en forme les solutions à l'aide des questions précédentes.

ii. On prend la limite dans une solution de l'équation pour conclure, un peu comme lorsque l'on résout un problème de Cauchy.

f. Le problème reste de savoir si F vérifie aussi (E) en 0 !

2. **a.** **i.** Le calcul de F est direct, seul le cas $x = 0$ est à gérer.

ii. On utilise l'expression de F obtenue pour former le développement limité voulu par opérations sur les développements limités.

iii. Il reste à déterminer les limites de F aux bornes de son ensemble définition ainsi qu'étudier le signe de sa dérivée pour avoir le tableau de variations complet.

b. i. On peut montrer les deux inégalités proposées à l'aide de deux études de fonctions rapides, puis utiliser les opérations sur les inégalités pour obtenir la majoration de F.

Le caractère borné de Φ s'obtient en utilisant la croissance de l'intégrale.

ii. On trouve qu'il y a un lien entre Φ et F...que l'on exploite directement.