Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2435

1. Simplifier : $A = \dfrac{10^3 + 10^5 + 10^7}{10^4 + 10^6 + 10^8}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier $B = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \times (1,5)^{n-2} \times 9$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier : $C = (-1)^{2n+2} - (-1)^{2n+3} + (-1)^{2n-1}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier : $D = 2^{n+2} - 3 \times 2^n - 8 \times 2^{2n-2} + \dfrac{1}{2} \times 2^{n+1}$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2435

1. L'idée directrice consiste à factoriser au numérateur et au dénominateur par la plus petite puissance de 10, puis de simplifier.

$$\begin{aligned} A &= \frac{10^3 + 10^5 + 10^7}{10^4 + 10^6 + 10^8} \\ &= \frac{10^3\left(1 + 10^2 + 10^4\right)}{10^4\left(1 + 10^2 + 10^4\right)} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En remarquant qu'une écriture fractionnaire de $1,5$ est $\dfrac{3}{2}$, et que $9 = 3^2$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \times (1,5)^{n-2} \times 9 \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \times 3^2 \\ &= \frac{2^n}{3^n} \times \frac{3^{n-2}}{2^{n-2}} \times 3^2 \\ &= \frac{2^n}{3^n} \times \frac{3^n}{2^{n-2}} \\ &= 2^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut commencer par factoriser par la plus petite puissance de (-1), puis on simplifiera l'expression obtenue en se souvenant que $(-1)^{\text{entier pair}} = 1$ et $(-1)^{\text{entier impair}} = -1$:

$$\begin{aligned} C &= (-1)^{2n+2} - (-1)^{2n+3} + (-1)^{2n-1} \\ &= (-1)^{2n-1}\left((-1)^3 - (-1)^4 + 1\right) \\ &= -1 \times (-1 - 1 + 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut commencer par factoriser par la plus petite puissance de 2 en ayant au préalable remarqué de $8 = 2^3$:

$$\begin{aligned} D &= 2^{n+2} - 3 \times 2^n - 8 \times 2^{2n-2} + \frac{1}{2} \times 2^{n+1} \\ &= 2^{n+2} - 3 \times 2^n - 2^3 \times 2^{2n-2} + 2^n \\ &= 2^{n+2} - 3 \times 2^n - 2^{2n+1} + 2^n \\ &= 2^n\left(2^2 - 3 - 2^{n+1} + 1\right) \\ &= 2^n\left(4 - 3 - 2^{n+1} + 1\right) \\ &= 2^n\left(2 - 2^{n+1}\right) \\ &= 2^{n+1}\left(1 - 2^n\right) \end{aligned}$$

EX. 2 | Réf. 2436

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O\,;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$ et on note $\mathcal{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ la base de vecteurs du plan associée à $\mathcal{R}$.

1. Soient $\Omega\,(1,1)_{\mathcal{R}}$ un point du plan, $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ deux vecteurs du plan.
   Justifier que $\mathcal{R}' = \left(\Omega\,;\ \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère cartésien du plan.
2. Soit $K\,(-4,-2)_{\mathcal{R}}$.
   Déterminer les coordonnées du point K dans $\mathcal{R}'$.
3. Quelles sont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ du point $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)_{\mathcal{R}'}$?

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2436

1. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ données dans la base de vecteurs du plan $\mathcal{B}$ sont clairement non proportionnelles, donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
Ainsi, $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ forment une base de vecteurs du plan, que l'on nommera $\mathcal{B}'$ pour la suite de l'exercice.
Par conséquent $\mathcal{R}' = \left(\Omega\ ;\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est un repère cartésien du plan.

2. Notons $K\,(x', y')_{\mathcal{R}'}$ les coordonnées de K dans $\mathcal{R}'$.
D'après la relation de Chasles pour les vecteurs, on a : $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega K}$.
Par définition des coordonnées de K et Ω dans $\mathcal{R}$, on a : $\overrightarrow{OK} = -4\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.
Par définition des coordonnées de K dans $\mathcal{R}'$, on a :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega K} &= x'\overrightarrow{u} + y'\overrightarrow{v}\\ &\underset{\substack{\text{or } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\\ \text{et } \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}}}{=} x'\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right) + y'\left(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)\\ &= (x'-y')\,\overrightarrow{i} + (x'+y')\,\overrightarrow{j}\end{aligned}$$
Par suite, on a :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega K} &= \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + (x'-y')\,\overrightarrow{i} + (x'+y')\,\overrightarrow{j}\\ &= (x'-y'+1)\,\overrightarrow{i} + (x'+y'+1)\,\overrightarrow{j} \quad (\star)\end{aligned}$$
Par unicité des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OK}$ dans la base de vecteurs $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on obtient le système $(\mathcal{S})$ suivant d'inconnue le couple de réels (x', y') :
$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} -4 = x'-y'+1 \\ -2 = x'+y'+1 \end{cases} \text{ qui est équivalent à } (\mathcal{S}) : \begin{cases} x'-y' = -5 \\ x'+y' = -3 \end{cases}$$
On résout alors $(\mathcal{S})$ par combinaison :
$$\begin{cases} x'-y' = -5 \\ x'+y' = -3 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x'-y' = -5 \\ 2y' = 2 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x'-y' = -5 \\ y' = 1 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x' = -4 \\ y' = 1 \end{cases}$$
On en déduit ainsi que $K\,(-4, 1)_{\mathcal{R}'}$.

3. En transposant au cas de $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)_{\mathcal{R}'}$ la relation $(\star)$, on peut écrire :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{OP} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1\right)\overrightarrow{j}\\ &= \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}\end{aligned}$$
Or en notant $P\,(x, y)_{\mathcal{R}}$ les coordonnées de P dans $\mathcal{R}$, d'après la définition des coordonnées de P dans $\mathcal{R}$, on a $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ et la relation $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega P}$ donne par unicité des coordonnées de $\overrightarrow{OP}$ dans la base de vecteurs $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.
Par conséquent $P\,(1, 2)_{\mathcal{R}}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2437

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ dont on note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ la base de vecteurs du plan associée. Les coordonnées des points et des vecteurs de cet exercice sont données dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{B}$ respectivement.

1. Soit $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix} 8 \\ k-1 \end{pmatrix}$ où $k \in \mathbb{R}$. Déterminer la valeur du réel k sachant que $\left\|\overrightarrow{d}\right\| = 10$.
2. On donne $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Déterminer $m \in \mathbb{R}$ tel que $\left\|\overrightarrow{u} + m\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{82}$.
3. Déterminer $y \in \mathbb{R}$ pour que le point $P\,(2, -1)$ appartienne à la médiatrice du segment $[AB]$ où $A\,(5, 3)$ et $B\,(-2, y)$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2437

1. Par hypothèse, $\left\|\overrightarrow{d}\right\| = 10$ ou encore $\left\|\overrightarrow{d}\right\|^2 = 100$. Or $\left\|\overrightarrow{d}\right\|^2 = 8^2 + (k-1)^2$. Par suite, on cherche k tel que $64 + (k-1)^2 = 100$ c'est à dire $(k-1)^2 = 36$. Or : $(k-1)^2 = 36 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} k-1 = 6 \\ \text{ou} \\ k-1 = -6 \end{array}\right.$ ce qui donne $k = 7$ ou $k = -5$.

2. Par opérations sur les vecteurs, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} + m\overrightarrow{v}$ où $m \in \mathbb{R}$ sont $\begin{pmatrix} 2-2m \\ 3+4m \end{pmatrix}$. Le repère $\mathcal{R}$ étant orthonormé, on a donc : $\left\|\overrightarrow{u} + m\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{82} \quad \Leftrightarrow \quad (2-2m)^2 + (3+4m)^2 = 82.$

En développant, on obtient :
$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{u} + m\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{82} \quad & \Leftrightarrow \quad 13 + 16m + 20m^2 = 82 \\ & \Leftrightarrow \quad 20m^2 + 16m - 69 = 0 \end{aligned}$$

On reconnaît alors une équation de degré 2 en m dont le discriminant vaut 76 et qui possède par suite deux solutions réelles, $m_1 = \dfrac{3}{2}$ et $m_2 = -\dfrac{23}{10}$.

En conclusion, $\left\|\overrightarrow{u} + m\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{82} \quad \Leftrightarrow \quad m = \dfrac{3}{2}$ ou $m = -\dfrac{23}{10}$.

3. On sait que :
$$\begin{aligned} P \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \quad & \Leftrightarrow \quad AP = PB \\ & \Leftrightarrow \quad \left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \left\|\overrightarrow{PB}\right\| \\ & \Leftrightarrow \quad \left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{PB}\right\|^2 \end{aligned}$$

Or puisque $\left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2 = 25$ et $\left\|\overrightarrow{PB}\right\|^2 = 16 + (y+1)^2$ il vient :
$$\begin{aligned} P \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \quad & \Leftrightarrow \quad 25 = 16 + (y+1)^2 \\ & \Leftrightarrow \quad (y+1)^2 = 9 \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} y+1 = 3 \\ \text{ou} \\ y+1 = -3 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow \quad y = 2 \quad \text{ou} \quad y = -4 \end{aligned}$$

En conclusion, P appartient à la médiatrice $[AB]$ si, et seulement si, $y = 2$ ou $y = -4$.