Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2262

Dans cet exercice, le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

Les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ sont clairement non colinéaires et forment donc un base $\mathcal{B}$ de vecteurs du plan.

Déterminer alors les coordonnées, dans cette base $\mathcal{B}$ du vecteur $\vec{w}$ dont les coordonnées dans la base $\left(\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ sont $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2262

Déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}=\left(\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ c'est déterminer deux réels α et β tels que : $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$.

Puisque les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans la base $\left(\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ sont $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, ce signifie que : $\vec{w}=3\vec{i}-2\vec{j}$.

L'idée est donc d'exprimer les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Ainsi, puisque $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ dans la base $\left(\vec{i}\,,\vec{j}\right)$, on a les deux relations : $\left\{\begin{array}{ll}(\star_1) & \vec{u}=\vec{i}+\vec{j}\\ & \text{et}\\ (\star_2) & \vec{v}=-\vec{i}+\vec{j}\end{array}\right.$.

En ajoutant ces deux relations, c'est à dire en effectuant $(\star_1)+(\star_2)$, il vient : $\vec{u}+\vec{v}=2\vec{j}$ et par conséquent $\vec{j}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

De même, en soustrayant ces deux relations, c'est à dire en effectuant $(\star_1)-(\star_2)$, il vient alors : $\vec{u}-\vec{v}=2\vec{i}$ et par conséquent $\vec{i}=\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$.

Finalement, on obtient : $\vec{w}=3\left(\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}\right)-2\left(\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\right)$.

On en déduit donc que : $\vec{w}=\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{5}{2}\vec{v}$ et les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont donc $\vec{w}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

EX. 2 | Réf. 2263

Dans cet exercice, le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

Dans chacun des cas suivants, calculer **dans cet ordre** : $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\left\|\vec{u}\right\|$ et $\left\|\vec{v}\right\|$, puis $\cos\left(\vec{u}\,,\vec{v}\right)$:

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$; **2.** $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; **3.** $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$;

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2263

Puisque l'on travaille dans un repère orthonormé du plan, on peut calculer les produits scalaires et les normes demandés à l'aide de les formules correspondantes.

Par ailleurs, de la relation $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos\left(\vec{u}\,,\vec{v}\right)$, on en déduit clairement que : $\cos\left(\vec{u}\,,\vec{v}\right)=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|}$.

1.
- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 2\times(-2)+(-2)\times 1 = -4-2 = -6$
- $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- $\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$
- $\cos\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right) = \dfrac{-6}{2\sqrt{2}\times\sqrt{5}} = -\dfrac{3}{\sqrt{10}} = -\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

2.
- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 1\times 2+2\times 1 = 2+2 = 4$
- $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
- $\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$
- $\cos\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right) = \dfrac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \dfrac{4}{5}$

3.
- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 3\times(-2)+(-2)\times 4 = -6-8 = -14$
- $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
- $\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{(-2)^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
- $\cos\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right) = \dfrac{-14}{\sqrt{13}\times 2\sqrt{5}} = -\dfrac{7}{\sqrt{65}} = -\dfrac{7\sqrt{65}}{65}$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2264

Dans la figure ci-après, ABC est un triangle isocèle de sommet A et $ABIJ$ est un parallélogramme.
On pose $BC = a$. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{v}$ en fonction de a dans chacun des cas suivants :

1. $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BA}$;
2. $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{JC}$;
3. $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AI}$;
4. $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CI}$;
5. $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OJ}$;
6. $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{OI}$;
7. $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{IA}-\overrightarrow{AJ}$;
8. $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CI}+\overrightarrow{OJ}$;

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2264

On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{v}$ en projettant un des deux vecteurs sur l'autre.
Pour les calculs qui suivent, on introduira les points $P = m[AI]$ qui donnera $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AP}$, et K le projeté orthogonal de I sur la droite (BC), qui compte-tenu de la configuration géométrique sur laquelle on travaille, donnera $\overrightarrow{CK} = 3\overrightarrow{CO}$.

1. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BO} = BC\times BO = a\times\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2}{2}$

2. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} = BC\times BC = a\times a = a^2$

3. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OB} = -2\times BC\times OB = -2\times a\times\dfrac{a}{2} = -a^2$

4. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CK} = -BC\times CK = -a\times 3\dfrac{a}{2} = -\dfrac{3a^2}{2}$

5. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OJ}\right) = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OB} = \dfrac{a^2}{2}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OB} = \dfrac{a^2}{2}-a\times\dfrac{a}{2} = 0$

6. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OK} = -2\times BC\times OK = -2\times a\times a = -2a^2$

7. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}\cdot\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{AJ}\right) = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OB} = a^2-(-BC\times OB) = a^2+a\times\dfrac{a}{2} = \dfrac{3}{2}a^2$

8. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}\cdot\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{OJ}\right) = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OJ} = -\dfrac{3}{2}a^2+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OB} = -\dfrac{3}{2}a^2-BC\times OB = -\dfrac{3}{2}a^2-a\times\dfrac{a}{2} = -\dfrac{5}{2}a^2$

EX. 4 | Réf. 2265

Le triangle ABC est tel que $AB = 2$, $AC = 3$ et $BC = 4$.

1. En écrivant $BC^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2$ et en développant cette expression, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2. S'inspirer de la question précédente pour calculer $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 2265

1.
$$\begin{aligned}
BC^2 &= \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 \\
&= \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \\
&= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 \\
&= 3^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + 2^2
\end{aligned}$$

Puisque $BC = 4$, on en déduit donc que : $16 = 13 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ qui donnera $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -\dfrac{3}{2}$ d'où le résultat puisque $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

2. Sur le même principe :

- $$\begin{aligned}
AC^2 &= \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right)^2 \\
&= \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) \\
&= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} \\
&= \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 - 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 \\
&= 4^2 - 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + 2^2
\end{aligned}$$
  Puisque $AC = 3$, on en déduit donc que : $9 = 20 - 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ qui donnera $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \dfrac{11}{2}$.

- $$\begin{aligned}
AB^2. &= \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right)^2 \\
&= \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right) \\
&= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA} \\
&= \left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 \\
&= 4^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + 3^2
\end{aligned}$$
  Puisque $AB = 2$, on en déduit donc que : $4 = 25 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$ qui donnera $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \dfrac{21}{2}$ d'où le résultat puisque $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.