Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 4681

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible, puis en déterminer son inverse.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4681

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée de la matrice identitée afin de déterminer le rang de cette dernière et s'assurer de son inversibilité :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Il y a 4 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 4 et la matrice est ainsi inversible puisque carrée d'ordre 4 et de rang 4.

On poursuit alors l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 1L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{2}L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice est ainsi : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4682

On considère l'application $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & \Phi(P) = \left(X^2-1\right)P'' + 2XP' \end{array} \right.$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Montrer que $\Phi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.

2. Montrer que l'application Φ est linéaire.

3. Que peut-on conclure pour Φ ?

4. On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2, X^3\right)$.

- **a.** Déterminer les images par Φ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
- **b.** En déduire la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
- **c.** Φ est-il un automorphisme ?

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4682

1. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On a donc $P' \in \mathbb{R}_2[X]$ et $P'' \in \mathbb{R}_1[X]$. Ainsi par produit $\underbrace{\left(X^2-1\right)}_{\in\mathbb{R}_2[X]} \times \underbrace{P''}_{\in\mathbb{R}_1[X]} \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\underbrace{2X}_{\in\mathbb{R}_1[X]} \times \underbrace{P'}_{\in\mathbb{R}_2[X]} \in \mathbb{R}_3[X]$. Finalement par somme $\left(X^2-1\right)P'' + 2XP' \in \mathbb{R}_3[X]$ et ainsi $\Phi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X]$. On pose $R = \lambda P + Q$.
Montrons que $\Phi(R) = \lambda\Phi(P) + \Phi(Q)$.
Par définition de Φ, il vient : $\Phi(R) = \left(X^2-1\right)R'' + 2XR'$.
Par linéarité de la dérivation, on a :

$$\begin{array}{rcl} R' & = & (\lambda P + Q)' \\ & = & \lambda P' + Q' \\ R'' & = & (\lambda P + Q)'' \\ & = & \lambda P'' + Q'' \end{array}$$

Ainsi, on en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} \Phi(R) & = & \left(X^2-1\right)(\lambda P'' + Q'') + 2X(\lambda P' + Q') \\ & = & \left(X^2-1\right) \times \lambda P'' + \left(X^2-1\right) \times Q'' + 2X \times \lambda P' + 2X \times Q' \\ & = & \lambda\left(\left(X^2-1\right)P'' + 2XP'\right) + \left(X^2-1\right)Q'' + 2XQ' \\ & = & \lambda\Phi(P) + \Phi(Q) \end{array}$$

On en déduit donc que Φ est une application linéaire.

3. Puisque Φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$, on en déduit que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

4. a. Un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{rcl} \Phi(1) & = & \left(X^2-1\right) \times 0 + 2X \times 0 \\ & = & 0 \\ \Phi(X) & = & \left(X^2-1\right) \times 0 + 2X \times 1 \\ & = & 2X \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \Phi\left(X^2\right) & = & \left(X^2-1\right) \times 2 + 2X \times 2X \\ & = & 2X^2 - 2 + 4X^2 \\ & = & 6X^2 - 2 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \Phi\left(X^3\right) & = & \left(X^2-1\right) \times 6X + 2X \times 3X^2 \\ & = & 6X^3 - 6X + 6X^3 \\ & = & 12X^3 - 6X \end{array}$$

b. On en déduit la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$: $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}_3[X]}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

c. Puisque $\Phi(1) = 0$, le noyau de Φ n'est pas réduit au vecteur nul de $\mathbb{R}_3[X]$. Ainsi, par théorème l'application Φ n'est pas injective, et par suite n'est pas bijective. En conclusion, Φ n'est pas un automorphisme.