## Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

## Travailler les fondamentaux

### EX. 1 | Réf. 4097

On considère l'application $\Psi$ définie par :

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \longmapsto & (P(0), P'(0), P''(0), P'''(0)) \end{array} \right.$$

**1.** Montrer que $\Psi$ est un isomorphisme.

**2.** Déterminer le polynôme $P$ de $\mathbb{R}_3[X]$ qui vérifie $\Psi(P) = (-1, 1, -1, 1)$.

### EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4097

**1. Caractère linéaire de $\Psi$ :** les deux ensembles $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^4$ sont bien deux espaces vectoriels.
Soient alors $(P, Q) \in \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Posons $R = \lambda P + Q$ et montrons que $\Psi(R) = \lambda \Psi(P) + \Psi(Q)$.

$$\begin{array}{rcl} \Psi(R) & = & (R(0), R'(0), R''(0), R'''(0)) \\ & = & \left((\lambda P + Q)(0), (\lambda P + Q)'(0), (\lambda P + Q)''(0), (\lambda P + Q)'''(0)\right) \\ & \underset{\text{La dérivation est linéaire}}{=} & ((\lambda P + Q)(0), (\lambda P' + Q')(0), (\lambda P'' + Q'')(0), (\lambda P''' + Q''')(0)) \\ & \underset{\text{L'évalution en un point est linéaire}}{=} & (\lambda P(0) + Q(0), \lambda P'(0) + Q'(0), \lambda P''(0) + Q''(0), \lambda P'''(0) + Q'''(0)) \\ & = & (\lambda P(0), \lambda P'(0), \lambda P''(0), \lambda P'''(0)) + (Q(0), Q'(0), Q''(0), Q'''(0)) \\ & = & \lambda (P(0), P'(0), P''(0), P'''(0)) + \Psi Q \\ & = & \lambda \Psi(P) + \Psi(Q) \end{array}$$

$\Psi$ est bien linéaire.

**Caractère bijectif de $\Psi$ :** les deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^4$ étant tous les deux de dimension finie égale à 4, d'après le théorème de caractérisation des isomorphismes en dimension finie, l'application linéaire $\Psi$ est un bijective si, et seulement si, sa représentation matricielle dans un couple quelconque de bases de $\mathbb{R}_3[X]$ et de $\mathbb{R}^4$, est inversible.

En désignant par $\mathcal{B} = \left(\tilde{1}, X, X^2, X^3\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et par $\mathcal{C} = ((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1))$ celle de $\mathbb{R}^4$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \Psi(\tilde{1}) & = & \left(\tilde{1}(0), \tilde{1}'(0), \tilde{1}''(0), \tilde{1}'''(0)\right) \\ & = & (1, 0, 0, 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \Psi(X) & = & (X(0), X'(0), X''(0), X'''(0)) \\ & = & (0, 1, 0, 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \Psi\left(X^2\right) & = & \left(X^2(0), \left(X^2\right)'(0), \left(X^2\right)''(0), \left(X^2\right)'''(0)\right) \\ & = & (0, 0, 2, 0) \\ & = & 2(0, 0, 1, 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \Psi\left(X^3\right) & = & \left(X^3(0), \left(X^3\right)'(0), \left(X^3\right)''(0), \left(X^3\right)'''(0)\right) \\ & = & (0, 0, 0, 6) \\ & = & 6(0, 0, 0, 1) \end{array}$$

On en déduit donc que la matrice $A$ de $\Psi$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est donc : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

La matrice $A$ est ainsi une matrice diagonale.

Le théorème de caractérisation des matrices diagonales inversibles donne que la matrice diagonale $A$ est inversible si, et seulement si, tous ses termes diagonaux sont non nuls, ce qui est le cas ici.

la matrice $A$ est inversible, et par suite $\Psi$ est bijectif.

$\Psi$ est une application linéaire bijective. C'est donc un isomorphisme.

**2.** Soit $P = d + cX + bX^2 + aX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

On a : $(\Psi(P) = (-1, 1, -1, 1)) \Leftrightarrow (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\Psi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(-1, 1, -1, 1))$

$$\Leftrightarrow \left( A \times \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left( \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Puisque $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, on en déduit directement que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

Par suite, il vient que : $A^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ ce qui donne $P = -1 + X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3$.

Le polynôme $P = -1 + X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3$ est tel que $\Psi(P) = (-1, 1, -1, 1)$.

## EX. 2 | Réf. 0909

Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha$ la matrice $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & \alpha \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Calculer son inverse dans ce cas.

## EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 0909

**Étude de l'inversibilité de $A(\alpha)$ en fonction de $\alpha$ :** La matrice $A(\alpha) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible si, et seulement si, $\mathrm{rg}\,(A(\alpha)) = 3$.

Un échelonnement en ligne de $A(\alpha)$ donne :

$$A(\alpha) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha - 7 \end{pmatrix}$$

Par suite, le rang de $A$ est égal à 3 si, et seulement si $\alpha - 7 \neq 0$ c'est à dire $\alpha \neq 7$.

La matrice $A(\alpha)$ est inversible si, et seulement si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$.

**Recherche de l'inverse de la matrice $A(\alpha)$ :** Soit alors $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$.

On recherche l'inverse de la matrice $A(\alpha)$ en échelonnement en ligne la matrice augmentée $(A(\alpha) | I_3)$ :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha-1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-7 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{\text{Puisque } \alpha - 7 \neq 0 \text{ on fait :} \\ L_2 \leftarrow (\alpha-7) L_2 - 3L_3 \\ L_1 \leftarrow (\alpha-7) L_1 - L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha-7 & \alpha-7 & 0 & \alpha-8 & 2 & -1 \\ 0 & \alpha-7 & 0 & 4-\alpha & \alpha-1 & -3 \\ 0 & 0 & \alpha-7 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha-7 & 0 & 0 & 2\alpha-12 & 3-\alpha & 2 \\ 0 & \alpha-7 & 0 & 4-\alpha & \alpha-1 & -3 \\ 0 & 0 & \alpha-7 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{\text{et comme on a} \\ \text{toujours } \alpha - 7 \neq 0 \\ L_1 \leftarrow \frac{1}{\alpha-7} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{\alpha-7} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{\alpha-7} L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dfrac{2\alpha-12}{\alpha-7} & \dfrac{3-\alpha}{\alpha-7} & \dfrac{2}{\alpha-7} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{4-\alpha}{\alpha-7} & \dfrac{\alpha-1}{\alpha-7} & -\dfrac{3}{\alpha-7} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{\alpha-7} & -\dfrac{2}{\alpha-7} & \dfrac{1}{\alpha-7} \end{array}\right)$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$, la matrice $A(\alpha)$ est inversible d'inverse la matrice

$$(A(\alpha))^{-1} = \frac{1}{\alpha-7} \begin{pmatrix} 2\alpha-12 & 3-\alpha & 2 \\ 4-\alpha & \alpha-1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

## Préparation à l'oral

### EX. 3 | Réf. 4488

**1.** Résoudre l'équation $(\star)$ : $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On notera $\lambda_1 < \lambda_2$ les solutions obtenues.

**2.** Donner un exemple de matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(\diamond)$ : $A^2 - A - 2\mathrm{I}_n = (0)$.

**3.** On fixe une telle matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on définit :

$$P = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(A - \lambda_1 \mathrm{I}_n) \text{ et } Q = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_2 \mathrm{I}_n)$$

Montrer que $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$.

**4.** Calculer $P + Q$, $PQ$ et $QP$, puis exprimer $A$ comme combinaison linéaire de $P$ et $Q$.

**5.** Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$A^p = \frac{1}{3}\left(2^p + (-1)^{p+1}\right) A + \frac{2}{3}\left(2^{p-1} + (-1)^p\right) \mathrm{I}_n$$

### EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 4488

## Mobiliser toutes ses connaissances

## EX. 4 | Réf. 4494

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données par $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n + \frac{2}{3}v_n - \frac{4}{3}w_n \\ v_{n+1} & = & -3u_n + \frac{5}{3}v_n + \frac{5}{3}w_n \\ w_{n+1} & = & -\frac{3}{2}u_n + \frac{2}{3}v_n + \frac{7}{6}w_n \end{array}\right.$$

On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier qu'il existe un unique $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X_0 = aC_1 + bC_2 + cC_3$.
2. Déterminer $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer $AC_1$, $AC_2$ et $AC_3$.
4. Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ X_n = a\left(\frac{5}{2}\right)^n C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^n C_3$

## EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 4494

1. On désigne par $\mathcal{F} = (C_1, C_2, C_3)$ qui est donc une famille de 3 vecteurs de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3.
   Le théorème de caractérisation des bases de vecteurs par le rang de la famille donne ici que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, cette famille est de rang 3.
   En désignant par $\mathcal{B}_C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on sait que $\mathrm{rg}\,(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{F}))$.
   Or par définition : $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Un échelonnement en ligne donne :
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   Cette dernière matrice est triangulaire supérieure avec tous ses termes diagonaux non nuls. Elle est donc, puisque élément de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, de rang 3.
   La famille $\mathcal{F} = (C_1, C_2, C_3)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et il existe donc un unique triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X_0 = aC_1 + bC_2 + cC_3$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   En remarquant que $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$, il vient que : $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -3 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + \frac{2}{3}v_n - \frac{4}{3}w_n \\ -3u_n + \frac{5}{3}v_n + \frac{5}{3}w_n \\ -\frac{3}{2}u_n + \frac{2}{3}v_n + \frac{7}{6}w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$
   La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -3 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$ est telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

**3. Calcul de $AC_1$ :** un calcul direct donne que : $$AC_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \frac{5}{2}C_1$$

**Calcul de $AC_2$ :** un calcul direct donne que : $$AC_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = C_2$$

**Calcul de $AC_3$ :** un calcul direct donne que : $$AC_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}C_3$$

On trouve que $AC_1 = \frac{5}{2}C_1$, $AC_2 = C_2$ et $AC_3 = \frac{1}{3}C_3$.

**4.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ : « $X_n = a\left(\frac{5}{2}\right)^n C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^n C_3$ ».

Montrons par récurrence sur l'entier $n$ que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n$.

**Initialisation :** au rang 0, on a $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ c'est à dire $X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Or on a : $$a\left(\frac{5}{2}\right)^0 C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^0 C_3 = aC_1 + bC_2 + cC_3 \underset{\text{quest. 1}}{=} X_0$$

Ainsi, on a bien $X_0 = a\left(\frac{5}{2}\right)^0 C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^0 C_3$ et la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

**Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a la propositon $\mathcal{P}(n)$, et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

On sait que $X_{n+1} = AX_n$. Par suite, par hypothèse de récurrence, on en déduit que : $X_{n+1} = A \times \left(a\left(\frac{5}{2}\right)^n C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^n C_3\right)$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= A \times \left(a\left(\frac{5}{2}\right)^n C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^n C_3\right) \\ &= a\left(\frac{5}{2}\right)^n AC_1 + bAC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^n AC_3 \\ &= a\left(\frac{5}{2}\right)^n \times \frac{5}{2}C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{3}C_3 \\ &= a\left(\frac{5}{2}\right)^{n+1} C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} C_3 \end{aligned}$$

et ainsi on a la proposition $\mathcal{P}(n+1)$.

**Conclusion :** la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0, et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel $n$.

On a bien établi que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = a\left(\frac{5}{2}\right)^n C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^n C_3$

## Pour s'occuper les jours de pluies

**EX. 5 | Réf. 4497**

On désigne par $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On considère les fonctions $f_1$, $f_2$, $f_3$ et $f_4$ définies par :

$$f_1 : x \longmapsto \left(\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,-x}\right)\cos(x),\ f_2 : x \longmapsto \left(\mathrm{e}^{\,x} - \mathrm{e}^{\,-x}\right)\cos(x),\ f_3 : x \longmapsto \left(\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,-x}\right)\sin(x),\ f_4 : x \longmapsto \left(\mathrm{e}^{\,x} - \mathrm{e}^{\,-x}\right)\sin(x)$$

On note $F = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une famille libre. Qu'en déduire pour $F$ ?
2. Montrer que l'application $\varphi : \left|\begin{array}{lcl} F & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}\right.$ est linéaire.
   Est-ce un endomorphisme de $F$ ?
3. Écrire la matrice de $\varphi$ dans la base $\mathcal{B}$ de $F$.
4. Est-ce que $\varphi$ est un automorphisme de $F$ ?

**EX. 5 | Éléments de correction | Réf. 4497**

1. Supposons que l'on ait $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = \tilde{0}$.
   On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) + \lambda_4 f_4(x) = 0 \quad (\star)$
   En particulier :
   **Pour $x = 0$, la relation $(\star)$ s'écrit :** $2\lambda_1 = 0$ et donc $\lambda_1 = 0$.
   **Pour $x = \pi$, la relation $(\star)$ s'écrit :** $-\left(\mathrm{e}^{\,\pi} - \mathrm{e}^{\,-\pi}\right)\lambda_2 = 0$ et donc $\lambda_2 = 0$.
   **Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, la relation $(\star)$ s'écrit :** $\lambda_3\left(\mathrm{e}^{\,\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\,-\frac{\pi}{2}}\right) + \lambda_4\left(\mathrm{e}^{\,\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e}^{\,-\frac{\pi}{2}}\right) = 0$.
   **Pour $x = -\dfrac{\pi}{2}$, la relation $(\star)$ s'écrit :** $\lambda_3\left(\mathrm{e}^{\,-\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\,\frac{\pi}{2}}\right)\lambda_4\left(\mathrm{e}^{\,-\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e}^{\,\frac{\pi}{2}}\right) = 0$.
   Ainsi, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ et $(\lambda_3, \lambda_4)$ est solution du système homogène $\mathcal{S}$ : $\begin{cases} \left(\mathrm{e}^{\,\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\,-\frac{\pi}{2}}\right)\lambda_3 + \left(\mathrm{e}^{\,\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e}^{\,-\frac{\pi}{2}}\right)\lambda_4 = 0 \\ \left(\mathrm{e}^{\,\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\,-\frac{\pi}{2}}\right)\lambda_3 + \left(-\mathrm{e}^{\,\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\,-\frac{\pi}{2}}\right)\lambda_4 = 0 \end{cases}$ où la combinaison $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne alors que $\lambda_4 = 0$ et par suite que $\lambda_3 = 0$.
   On obtient bien $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, ce qui assure le caractère libre de la famille $\mathcal{F}$.
   $F$ est alors un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, engendré par 4 vecteurs qui forment aussi une famille libre.
   $F$ est un espace vectoriel de dimension finie égale à 4.
2. **Caractère linéaire de $\varphi$ :** $\varphi$ est bien une application entre deux espaces vectoriels $F$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   Soient $(f, g) \in F \times F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $h = \lambda f + g$ et montrons que $\varphi(h) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$.
   On a alors directement :
   $$\begin{array}{rcl} \varphi(h) & = & h' \\ & = & (\lambda f + g)' \\ & \underset{\text{Dérivée d'une somme}}{=} & (\lambda f)' + g' \\ & \underset{\text{Dérivée de } \lambda u \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}{=} & \lambda f' + \varphi(g) \\ & = & \lambda\varphi(f) + \varphi(g) \end{array}$$
   $\varphi$ est bien une application linéaire.

   **Étude du caractère endomorphisme de $\varphi$ :** puisque $\varphi$ est linéaire, il s'agit de montrer que $\varphi$, étant définie sur $F$, elle prend ses valeurs dans $F$, c'est à dire que : $\forall f \in F,\ \varphi(f) \in F$ ou encore que $\mathrm{Im}\,(\varphi) \subset F$.
   Or $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ étant une base de $F$, on sait par théorème, que $\mathrm{Im}\,(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(\varphi(f_1), \varphi(f_2), \varphi(f_3), \varphi(f_4))$.
   Ainsi, il suffit de s'assurer que, pour tout $i \in [\![1;4]\!]$, on a $\varphi(f_i) \in F$.
   Les fonctions $f_1$, $f_2$, $f_3$ et $f_4$ sont clairement dérivables sur $\mathbb{R}$, et des calculs directs donnent que :
   $$\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathbb{R},\ f_1'(x) & = & \left(\mathrm{e}^{\,x} - \mathrm{e}^{\,-x}\right)\cos(x) - \left(\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,-x}\right)\sin(x) \\ & = & f_2(x) - f_3(x) \\ \text{et donc } \varphi(f_1) & = & f_2 - f_3 \in F \\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_2'(x) & = & \left(\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,-x}\right)\cos(x) - \left(\mathrm{e}^{\,x} - \mathrm{e}^{\,-x}\right)\sin(x) \\ & = & f_1(x) - f_4(x) \\ \text{et donc } \varphi(f_2) & = & f_1 - f_4 \in F \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\forall x \in \mathbb{R},\ f_3'(x) & = & (\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})\sin(x) + (\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})\cos(x) \\
 & = & f_4(x) + f_1(x) \\
\text{et donc } \varphi(f_3) & = & f_4 + f_1 \in F \\
\forall x \in \mathbb{R},\ f_4'(x) & = & (\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})\sin(x) + (\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})\cos(x) \\
 & = & f_3(x) + f_1(x) \\
\text{et donc } \varphi(f_4) & = & f_1 + f_3 \in F
\end{array}$$

$\varphi$ étant linéaire et telle que $\varphi : F \longrightarrow F$, $\varphi$ est un endomorphisme de $F$.

**3.** Les calculs précédents donnent que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**4.** Il s'agit ici de s'intéresser au caractère bijectif de $\varphi$.

D'après le théorème de caractérisation des endomorphismes en dimension finie, $\varphi$ est bijectif si, et seulement si, le rang de $\varphi$ est égal à la dimension de $F$, c'est à dire $4$.

Or le rang de $\varphi$ est égal au rang d'une de ses représentations matricielles.

Ainsi, on a : $\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)\right)$

Un échelonnement en ligne donne que :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et cette dernière matrice étant triangulaire supérieure à termes diagonaux tous non nuls, elle est donc de rang 4.

$\varphi$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 4 et qui est de rang 4, il est donc bijectif, et c'est donc bien un automorphisme de $F$.