Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 3738

On se propose dans cet exercice de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E): \qquad y'' - 3y' + 2y = 2\left(\sin(x)\right)^3$$

1. **Question préliminaire :** à l'aide des formules d'Euler, linéariser $\left(\sin(x)\right)^3$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation homogène (E_H) associée à (E).
3. Déterminer à l'aide du principe de superposition des solutions, une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 3738

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x} - \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\,x}}{2\mathrm{i}}$, par suite d'après la formule du binôme de Newton, il vient :

$$\begin{array}{rcl}
\left(\sin(x)\right)^3 & = & \dfrac{1}{(2\mathrm{i}\,)^3}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}\right)^{3-k}\left(-\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\,x}\right)^k \\
& = & \dfrac{1}{(2\mathrm{i}\,)^3}\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,3x} - 3\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,2x}\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\,x} + 3\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\,2x} - \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\,3x}\right) \\
& = & \dfrac{1}{(2\mathrm{i}\,)^3}\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,3x} - \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\,3x} - 3\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x} - \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\,x}\right)\right) \\
& = & \dfrac{1}{(2\mathrm{i}\,)^2}\dfrac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,3x} - \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\,3x} - 3\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x} - \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\,x}\right)}{2\mathrm{i}} \\
& = & -\dfrac{1}{4}\left(\sin(3x) - 3\sin(x)\right) \\
& = & \dfrac{3}{4}\sin(x) - \dfrac{1}{4}\sin(3x)
\end{array}$$

2. On a : $\quad (E_H): \quad y'' - 3y' + 2y = 0$. L'équation caractéristique associée à (E_H) étant $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$, il vient que les solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto C_1\mathrm{e}^{\,x} + C_2\mathrm{e}^{\,2x}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.
3. On remarque que : $\forall x \in \mathbb{R}, 2\left(\sin(x)\right)^2 = \dfrac{3}{2}\sin(x) - \dfrac{1}{2}\sin(3)$.
   On recherche une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ à l'aide de la méthode de superposition des solutions.
   On note alors : $\left\{\begin{array}{l} (E_1): \quad y'' - 3y' + 2y = \dfrac{3}{2}\sin(x) \\ (E_2): \quad y'' - 3y' + 2y = -\dfrac{1}{2}\sin(3x) \end{array}\right.$.

   Recherche d'une solution particulière de (E_1) sur $\mathbb{R}$: puisque $1 \times \mathrm{i}$ n'est pas solution de l'équation caractéristique associée à (E_1), on cherche y_1 solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ sous la forme :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_1(x) = A\cos(x) + B\sin(x) \text{ où } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$
   On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{array}{rcl} y_1(x) & = & A\cos(x) + B\sin(x) \\ y_1'(x) & = & -A\sin(x) + B\cos(x) \\ y_1''(x) & = & -A\cos(x) - B\sin(x) \end{array}$

Ainsi :

$$\left(\begin{array}{c} y_1 \text{ est solution de} \\ (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_1''(x) - 3y_1'(x) + 2y_1(x) = \frac{3}{2}\sin(x)\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{r} \forall x \in \mathbb{R}, \quad -A\cos(x) - B\sin(x) - 3\left(-A\sin(x) + B\cos(x)\right) \\ +2\left(A\cos(x) + B\sin(x)\right) = \frac{3}{2}\sin(x)\end{array}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, \quad (A-3B)\cos(x) + (3A+B)\sin(x) = \frac{3}{2}\sin(x)\right)$$

Par identification, on en déduit que (A, B) sont solutions du système $\left\{\begin{array}{l} A - 3B = 0 \\ 3A + B = \frac{3}{2}\end{array}\right.$ où après résolution on trouve que $A = \dfrac{9}{20}$ et $B = \dfrac{3}{20}$.

Ainsi, la fonction $y_1 : x \longmapsto \dfrac{9}{20}\cos(x) + \dfrac{3}{20}\sin(x)$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E_1).

Recherche d'une solution particulière de (E_2) sur $\mathbb{R}$: puisque $3 \times \mathrm{i}$ n'est pas solution de l'équation caractéristique associée à (E_2), on cherche y_2 solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$ sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_2(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x) \text{ où } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{array}{rcl} y_2(x) & = & A\cos(3x) + B\sin(3x) \\ y_1'(x) & = & -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x) \\ y_1''(x) & = & -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x)\end{array}$$

Ainsi :

$$\left(\begin{array}{c} y_2 \text{ est solution de} \\ (E_2) \text{ sur } \mathbb{R}\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_2''(x) - 3y_2'(x) + 2y_2(x) = -\frac{1}{2}\sin(3x)\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{r} \forall x \in \mathbb{R}, \quad -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x) - 3\left(-3A\sin(3x) + 3B\cos(3x)\right) \\ +2\left(A\cos(3x) + B\sin(3x)\right) = -\frac{1}{2}\sin(3x)\end{array}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, \quad (-7A-9B)\cos(3x) + (9A-7B)\sin(3x) = -\frac{1}{2}\sin(3x)\right)$$

Par identification, on en déduit que (A, B) sont solutions du système $\left\{\begin{array}{l} -7A - 9B = 0 \\ 39A - 7B = -\frac{1}{2}\end{array}\right.$ où après résolution on trouve que $A = -\dfrac{9}{260}$ et $B = \dfrac{7}{260}$.

Ainsi, la fonction $y_1 : x \longmapsto -\dfrac{9}{260}\cos(x) + \dfrac{7}{260}\sin(x)$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E_2).

Ainsi, d'après le principe de superposition, la fonction $y_P : x \longmapsto \dfrac{9}{20}\cos(x) + \dfrac{3}{20}\sin(x) - \dfrac{9}{260}\cos(x) + \dfrac{7}{260}\sin(x)$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

4. On en déduit alors que les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions :

$$x \longmapsto C_1\mathrm{e}^{\,x} + C_2\mathrm{e}^{\,2x} + \frac{9}{20}\cos(x) + \frac{3}{20}\sin(x) - \frac{9}{260}\cos(x) + \frac{7}{260}\sin(x) \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 3737

On se propose dans cet exercice de résoudre sur $]1; +\infty[$ l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E) : \qquad \left(x^2 - 1\right) y' - y = x^2$$

1. Question préliminaire : on considère $\Phi : \left|\begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x \frac{t^2}{(t-1)\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t\end{array}\right.$ où $a \in \,]1; +\infty[$.

a. Calculer la dérivée sur $]1; +\infty[$ de la fonction $u : t \longmapsto \sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}$.

b. Montrer à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}$ que :

$$\forall x \in \left]1;+\infty\right[, \quad \Phi(x) = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + (1+x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + K$$

où K est une constante réelle dépendant de a

2. Montrer que les solutions de l'équation homogène (E_H) associée à (E) sur $]1;+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \lambda\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Déterminer une solution particulière de (E) sur $]1;+\infty[$.

4. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]1;+\infty[$.

EX. 2 | Éléments de correction | `Réf. 3737`

1. **a.** D'après la formule de dérivation des fonctions composées, on a :

$$\begin{aligned} \forall t \in \left]1;+\infty\right], \quad u'(t) &= \frac{\dfrac{1\times(t+1)-(t-1)\times 1}{(t+1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}} \\ &= \frac{1}{(1+t)^2\sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}} \\ &= \frac{1}{(1+t)\left(\sqrt{1+t}\right)\dfrac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}} \\ &= \frac{1}{(1+t)\sqrt{t+1}\sqrt{t-1}} \\ &= \frac{1}{(1+t)\sqrt{(t+1)(t-1)}} \\ &= \frac{1}{(1+t)\sqrt{t^2-1}} \end{aligned}$$

b. Le changement de variables $u = \sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}$ donne les relations suivantes : $\begin{cases} t = a \quad \Leftrightarrow \quad u = \sqrt{\dfrac{a-1}{a+1}} \\ t = x \quad \Leftrightarrow \quad u = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} \\ \mathrm{d}u = \dfrac{1}{(t+1)\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t \\ u = \sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}} \quad \Leftrightarrow \quad t = \dfrac{u^2+1}{1-u^2} \end{cases}$

Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{t^2}{(t-1)\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t &= \int_a^x \frac{t^2(t+1)}{t-1}\frac{1}{(t+1)\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \left(\frac{u^2+1}{1-u^2}\right)^2 \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{(1-u)^2}+\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)\mathrm{d}u \\
&= \left[-\frac{1}{u}+\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}+\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\right]_{\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \\
&= \left[-\frac{1}{u}+\frac{2u}{1-u^2}+\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\right]_{\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \\
&= -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+(1+x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\ln\left(\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right)+K \\
&\qquad \text{où } K \text{ est égal à l'expression obtenu pour } x=\sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \\
&= -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+(1+x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\ln\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right)+K \\
&= -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+(1+x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+K
\end{aligned}$$

2. On commence par mettre (E) sous forme résolue :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y \text{ est solution de} \\ (E) \text{ sur }]1;+\infty[\end{pmatrix} &\Leftrightarrow \left(\forall x\in\,]1;+\infty[,\quad (x^2-1)\,y'(x)-y(x)=x^2\right) \\
&\underset{\substack{\text{car } x^2-1\neq 0 \\ \text{sur }]1;+\infty[}}{\Leftrightarrow} \left(\forall x\in\,]1;+\infty[,\quad y'(x)-\frac{1}{x^2-1}y(x)=\frac{x^2}{x^2-1}\right)
\end{aligned}$$

Les solutions sur $]1;+\infty[$ de (E_H) sont donc les fonctions :

$$x\longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-\Psi(x)}$$

où Ψ est une primitive sur $]1;+\infty[$ de $x\longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
En remarquant que :

$$\forall x\in\,]1;+\infty[,\quad \frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

on en déduit que : $\forall x\in\,]1;+\infty[,$

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \frac{1}{2}\left(\ln(x+1)-\ln(x-1)\right). \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\
&= \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent, les solutions sur $]1;+\infty[$ de (E_H) sont les fonctions $x\longmapsto \lambda\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

3. On cherche une solution particulière y_P de (E) sur $]1;+\infty[$ à l'aide de la méthode de variation de la constante en posant : $\forall x\in\,]1;+\infty[,\quad y_P(x)=\lambda(x)\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ où $\lambda :]1;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction dérivable à déterminer.

On a notamment que : $\forall x\in\,]1;+\infty[,$

$$\begin{aligned}
y_P(x) &= \lambda(x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \\
y_P'(x) &= \lambda'(x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\lambda(x)\frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_P \text{ est solution de} \\ (E) \text{ sur }]1;+\infty[\end{pmatrix} &\Leftrightarrow \left(\forall x \in]1;+\infty[,\quad y_P'(x) - \frac{1}{x^2-1}y_P(x) = \frac{x^2}{x^2-1}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\forall x \in]1;+\infty[,\quad y'(x) - \frac{1}{x^2-1}y(x) = \frac{x^2}{x^2-1}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\forall x \in]1;+\infty[,\quad \lambda'(x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \lambda(x)\frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x^2-1}\lambda(x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{x^2}{x^2-1}\right. \\
&= \left(\forall x \in]1;+\infty[,\quad \lambda'(x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{\lambda(x)}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} - \frac{\lambda(x)\sqrt{x-1}}{(x-1)(x+1)\sqrt{x+1}} = \frac{x^2}{x^2-1}\right) \\
&= \left(\forall x \in]1;+\infty[,\quad \lambda'(x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{\lambda(x)}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} - \frac{\lambda(x)}{(x+1)\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} = \frac{x^2}{x^2-1}\right) \\
&= \left(\forall x \in]1;+\infty[,\quad \lambda'(x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{\lambda(x)}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} - \frac{\lambda(x)}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2}{x^2-1}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\forall x \in]1;+\infty[,\quad \lambda'(x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{x^2}{x^2-1}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\forall x \in]1;+\infty[,\quad \lambda'(x) = \frac{x^2}{(x^2-1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\forall x \in]1;+\infty[,\quad \lambda'(x) = \frac{x^2}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}\right)
\end{aligned}
$$

Or la fonction $\Phi : x \longmapsto -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + (1+x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ est une primitive sur $]1;+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$ d'après la question préliminaire.

Ainsi, on en déduit que : $\quad \forall x \in]1;+\infty[,\quad \lambda(x) = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + (1+x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

et par suite que : $\quad \forall x \in]1;+\infty[,$

$$
\begin{aligned}
y_P(x) &= \left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + (1+x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\ . \\
&= -1 + (x-1) + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\
&= x - 2 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)
\end{aligned}
$$

4. Par suite, les solutions sur $]1;+\infty[$ de (E) sont les fonctions :

$$x \longmapsto \lambda\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + x - 2 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | `Réf. 3736`

On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation différentielle non linéaire $(\star)$ suivante :

$$(\star) : \qquad yy' = xy^2 + 1$$

1. Montrer que la fonction z définie par $z(x) = (y(x))^2$ vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre (E) que l'on résoudra sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire les solutions de l'équation $(\star)$.

EX. 3 | Éléments de correction | `Réf. 3736`

EX. 4 | Réf. 3735

On cherche à déterminer l'ensemble des solutions en fonction d'un paramètre réel m de l'équation différentielle (E_m) où :

$$(E_m): \qquad y'' - (m+1)y' + my = \mathrm{e}^{x} - x - 1$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H_m) associée à (E_m) en distinguant les cas $m = 1$ et $m \neq 1$.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation (E_m) en distinguant les cas $m = 1$, $m = 0$ et $m \notin \{0, 1\}$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions en fonction du paramètre m de l'équation différentielle (E_m).

EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 3735

1. (E_m) est une équation différentielle linéaire à coefficients constant de degré 2. Son équation caractéristique est $r^2 - (m+1)r + m = 0$ qui a pour discriminant $\delta = (m-1)^2 \geq 0$. Ainsi :

   Si $m \neq 1$ **:** l'équation caractéristique admet deux solutions réelles $r_1 = \dfrac{m+1-\sqrt{(m-1)^2}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{m+1+\sqrt{(m-1)^2}}{2}$

   En remarquant que $\sqrt{(m-1)^2} = |m-1|$, il vient de plus que :

   $m + 1 - \sqrt{(m-1)^2} = \begin{cases} m+1-(m-1) = 2 \text{ si } m > 1 \\ m+1-(1-m) = 2m \text{ si } m < 1 \end{cases}$ et $m + 1 + \sqrt{(m-1)^2} = \begin{cases} m+1+(m-1) = 2m \text{ si } m > 1 \\ m+1-(m-1) = 2 \text{ si } m < 1 \end{cases}$

   Autrement dit, dans tous les cas $(r_1, r_2) \in \{(1, m), (m, 1)\}$.

   On en déduit que les solutions de (H_m) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{mx}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

   Si $m = 1$ **:** l'équation caractéristique n'admet qu'une seule solution $r_0 = -\dfrac{-(m+1)}{2}$ c'est à dire $r_0 = 1$ et les solutions sur $\mathbb{R}$ sont alors dans ce cas les fonctions $x \longmapsto (C_1 x + C_2)\,\mathrm{e}^{x}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

2. On va chercher une solution particulière de (E_m) en utilisant le principe de superposition des solutions.

   On note alors $\begin{cases} (A_m) : y'' - (m+1)y' + my = \mathrm{e}^{x} \\ (B_m) : y'' - (m+1)y' + my = -x - 1 \end{cases}$.

   Recherche d'une solution particulière de (A_m) **:** on cherche une solution particulière y_a de (A_m) sous la forme :

   Si $m \neq 1$ **:** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_a(x) = Cx\mathrm{e}^{x}$ où $C \in \mathbb{R}$ puisque 1 est racine simple de l'équation caractéristique associée à (A_m).

   On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{array}{rcl} y_a(x) &=& Cx\mathrm{e}^{x} \\ y_a'(x) &=& C\mathrm{e}^{x} + Cx\mathrm{e}^{x} \\ y_a''(x) &=& 2C\mathrm{e}^{x} + Cx\mathrm{e}^{x} \end{array}$

   $$\text{Ainsi : } \left(\begin{array}{c} y_a \text{ est solution de} \\ (A_m) \text{ sur } \mathbb{R} \end{array}\right) \begin{array}{l} \Leftrightarrow \ (\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_a''(x) - (m+1)y_a'(x) + my_a(x) = \mathrm{e}^{x}) \\ \Leftrightarrow \ (\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2C\mathrm{e}^{x} + Cx\mathrm{e}^{x} - (m+1)\left(C\mathrm{e}^{x} + Cx\mathrm{e}^{x}\right) + Cmx\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}) \\ \Leftrightarrow \ (\forall x \in \mathbb{R}, C\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}) \end{array}$$

   Ainsi, par identification, $C = 1$ et par suite la fonction $y_a : x \longmapsto x\mathrm{e}^{x}$ est solution de (A_m) sur $\mathbb{R}$.

   Si $m = 1$ **:** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_a(x) = Cx^2\mathrm{e}^{x}$ où $C \in \mathbb{R}$ puisque 1 est racine double de l'équation caractéristique associée à (A_m).

   On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{array}{rcl} y_a(x) &=& Cx^2\mathrm{e}^{x} \\ y_a'(x) &=& 2Cx\mathrm{e}^{x} + Cx^2\mathrm{e}^{x} \\ y_a''(x) &=& 2C\mathrm{e}^{x} + 4Cx\mathrm{e}^{x} + Cx^2\mathrm{e}^{x} \end{array}$

   $$\text{Ainsi : } \left(\begin{array}{c} y_a \text{ est solution de} \\ (A_m) \text{ sur } \mathbb{R} \end{array}\right) \begin{array}{l} \Leftrightarrow \ (\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_a''(x) - (m+1)y_a'(x) + my_a(x) = \mathrm{e}^{x}) \\ \Leftrightarrow \ \left(\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2C\mathrm{e}^{x} + 4Cx\mathrm{e}^{x} + Cx^2\mathrm{e}^{x} - 2\left(2Cx\mathrm{e}^{x} + Cx^2\mathrm{e}^{x}\right) + Cx^2\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}\right) \\ \Leftrightarrow \ (\forall x \in \mathbb{R}, 2C\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}) \end{array}$$

   Ainsi, par identification, $C = \dfrac{1}{2}$ et par suite la fonction $y_a : x \longmapsto \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x}$ est solution de (A_m) sur $\mathbb{R}$.

   Recherche d'une solution particulière de (B_m) **:** on cherche une solution particulière y_b de (B_m) sous la forme :

Si $m \neq 0$ **:** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_b(x) = \alpha x + \beta$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{array}{rcl} y_b(x) & = & \alpha x + \beta \\ y_b'(x) & = & \alpha \\ y_b''(x) & = & 0 \end{array}$

Ainsi : $\begin{pmatrix} y_b \text{ est solution de} \\ (B_m) \text{ sur } \mathbb{R} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_b''(x) - (m+1)y_b'(x) + my_b(x) = -x-1)$

$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 - (m+1)\alpha + m\alpha x + m\beta = -x-1)$

$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, m\alpha x + m\beta - (m+1)\alpha = -x-1)$

Ainsi, par identification, (α, β) est solution du système $\begin{cases} m\alpha = -1 \\ m\beta - (m+1)\alpha = -1 \end{cases}$ qui donne $\alpha = -\dfrac{1}{m}$ et $\beta = \dfrac{-1-2m}{m^2}$ et par suite la fonction $y_b : x \longrightarrow -\dfrac{1}{m}x - \dfrac{2m+1}{m^2}$ est solution de (B_m) sur $\mathbb{R}$.

Si $m = 0$ **:** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_b(x) = \alpha x^2 + \beta x$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{array}{rcl} y_b(x) & = & \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ y_b'(x) & = & 2\alpha x + \beta \\ y_b''(x) & = & 2\alpha \end{array}$

Ainsi : $\begin{pmatrix} y_b \text{ est solution de} \\ (B_m) \text{ sur } \mathbb{R} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_b''(x) - (m+1)y_b'(x) + my_b(x) = -x-1)$

$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\alpha - (2\alpha x + \beta) = -x-1)$

$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, -2\alpha x + 2\alpha - \beta = -x-1)$

Ainsi, par identification, (α, β) est solution du système $\begin{cases} -2\alpha = -1 \\ 2\alpha - \beta = -1 \end{cases}$ qui donne $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = 2$ et par suite la fonction $y_b : x \longrightarrow -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x$ est solution de (B_m) sur $\mathbb{R}$.

3. On en déduit alors l'ensemble des solutions de (E_m) :

Si $m \neq 0$ **et** $m \neq 1$ **:** les solutions de (E_m) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \longmapsto C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{mx} + x\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{m}x - \dfrac{2m+1}{m^2}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$

Si $m = 0$ **et** $m \neq 1$ **:** les solutions de (E_m) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \longmapsto C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{mx} + x\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{2}x^2 + 2x$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$

Si $m \neq 0$ **et** $m = 1$ **:** les solutions de (E_m) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \longmapsto C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{mx} + \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{m}x - \dfrac{2m+1}{m^2}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$

Si $m = 0$ **et** $m = 1$ **:** les solutions de (E_m) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \longmapsto C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{mx} + \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{2}x^2 + 2x$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$

EX. 5 | Réf. 3739

Soit φ une application dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \qquad \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) y'(x) + y(x) = \varphi(x)$$

1. On note G et F les applications de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \frac{G(x)}{\mathrm{e}^{x} - 1}$$

a. Montrer que G et F sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. **i.** Déterminer le développement limité de G au voisinage de 0 à l'ordre 2 en fonction de $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.

En déduire que : $\quad F(x) = \varphi(0) + \dfrac{x}{2}\varphi'(0) + \underset{x\to 0}{o}(x)$.

ii. En déduire que F est prolongeable par continuité en 0.

On notera encore F la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $F(0)$, puis montrer que F est dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.

c. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle homogène (E_0) associée à (E) :

$$(E_0) : \quad \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) y'(x) + y(x) = 0$$

Indication : on pourra remarquer que (E_0) est équivalente à $y'(x) + \dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}y(x) = 0$.

d. Montrer que F vérifie (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

e. **i.** Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

ii. Vérifier que F est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ possédant une limite finie quand x tend vers 0.

f. La fonction F est-elle solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$?

2. On suppose pour la suite de l'exercice que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) = e^{-x}$

a. **i.** Déterminer explicitement $F(x)$.

ii. Donner un développement limité de F à l'ordre 2 au voisinage de 0.

iii. Dresser le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}_+$.

b. On note Φ la primitive de F sur $\mathbb{R}_+$ et s'annulant en 0.

i. Montrer que : $\forall x \geq 4, \quad x \leq e^{\frac{x}{2}} - 1$, puis que : $\forall x \geq 4, \quad F(x) \leq \dfrac{1}{e^{\frac{x}{2}} - 1} \leq e^{-\frac{x}{2}}$.

En déduire que la fonction Φ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

ii. Étudier les variations de Φ sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que $\Phi(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

EX. 5 | Éléments de correction | Réf. 3739

1. **a.** La fonction G est la primitive qui s'annule en 0 de l'application continue $t \longmapsto e^t \varphi(t)$, donc G est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par suite, F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, G et F sont des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. **i.** La fonction $t \longmapsto e^t \varphi(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de telles fonctions et admet donc, d'après le cours, un développement limité à l'ordre 1 en 0 donné par : $e^t \varphi(t) = \big(1 + t + \underset{t\to 0}{o}(t)\big)\big(\varphi(0) + \varphi'(0)t + \underset{t\to 0}{o}(t)\big) = \varphi(0) + \big(\varphi(0) + \varphi'(0)\big)t + \underset{t\to 0}{o}(0)$

En intégrant entre 0 et x, on obtient le développement limité à l'ordre 2 de la fonction G, ce qui prouve que : G admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 donné par $G(x) = \varphi(0)x + \dfrac{\varphi(0) + \varphi'(0)}{2}x^2 + \underset{x\to 0^+}{o}(x^2)$

Pour obtenir le développement limité à l'ordre 1 de F en 0, on commence par rechercher un tel développement pour la fonction $x/(e^x - 1)$. On a que : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc
$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x - 1} &= \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)} \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall x \geq 0, \qquad F(x) &= \frac{G(x)}{e^x - 1} \\ &= \frac{\varphi(0)x + \big(\varphi(0) + \varphi'(0)\big)\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0^+}{o}(x^2)}{e^x - 1} \\ &= \Big(\varphi(0) + \frac{\varphi(0) + \varphi'(0)}{2}x + \underset{x\to 0^+}{o}(x)\Big)\frac{x}{e^x - 1} \\ &= \Big(\varphi(0) + \frac{\varphi(0) + \varphi'(0)}{2}x + \underset{x\to 0^+}{o}(x)\Big)\Big(1 - \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)\Big) \\ &= \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{2}x + \underset{x\to 0^+}{o}(x) \end{aligned}$$

Donc F admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 donné par $F(x) = \varphi(0) + \dfrac{\varphi'(0)}{2}x + \underset{x\to 0^+}{o}(x)$.

ii. Le développement limité à l'ordre 1 de la fonction F que nous venons de déterminer permet d'affirmer que F admet en 0 une limite finie égale à $\varphi(0)$. On en déduit que F est prolongeable par continuité en 0 en posant $F(0) = \varphi(0)$.

Pour $x>0$, on a : $\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0} = \dfrac{1}{x}\Big(\varphi(0)+\dfrac{\varphi'(0)}{2}x+\underset{x\to0^+}{o}(x)-\varphi(0)\Big) = \dfrac{\varphi'(0)}{2}+\underset{x\to0^+}{o}(1)$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\dfrac{\varphi'(0)}{2}$ ce qui signifie que F est dérivable en 0 et $F'(0)=\dfrac{\varphi'(0)}{2}$.

c. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a $1-\mathrm{e}^{-x}\neq0$, donc, sur $\mathbb{R}_+^*$, (E_0) est équivalente à $y'(x)+\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}y(x)=0$.

Les solutions de l'équation de cette équation sont de la forme : $\forall x>0,\quad y_h(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\ln|\mathrm{e}^x-1|} = \dfrac{\lambda}{\mathrm{e}^x-1}$

Donc : $\forall x>0,\quad y(x)=\dfrac{\lambda}{\mathrm{e}^x-1}\quad(\lambda\in\mathbb{R})$.

d. On sait déjà que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a : $\forall x>0,$

$$F'(x) = \frac{G'(x)}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{G(x)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x\,\varphi(x)}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{G(x)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$$

Donc : $(1-\mathrm{e}^{-x})F'(x)+F(x) = (1-\mathrm{e}^{-x})\Big(\dfrac{\mathrm{e}^x\,\varphi(x)}{\mathrm{e}^x-1}-\dfrac{G(x)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}\Big)+\dfrac{G(x)}{\mathrm{e}^x-1} = \varphi(x)-\dfrac{G(x)}{\mathrm{e}^x-1}+\dfrac{G(x)}{\mathrm{e}^x-1} = \varphi(x)$ Ainsi, F vérifie (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

e. **i.** D'après le cours, les solutions générales de (E) s'obtiennent en ajoutant la solution particulière F de (E) aux solutions de l'équation homogène (E_0) déjà déterminées.

Ainsi,les solutions générales de (E) sont de la forme $\forall x>0,\ y(x)=F(x)+\dfrac{\lambda}{\mathrm{e}^x-1}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$.

ii. Soit y une solution de (E) donnée par $y(x)=F(x)+\dfrac{\lambda}{\mathrm{e}^x-1}$, où $\lambda\in\mathbb{R}$. Si $\lambda\neq0$, on a $\lim\limits_{x\to0^+}\lambda/(\mathrm{e}^x-1)=\pm\infty$ (selon le signe de λ) et $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=F(0)=\varphi(0)$, donc $\lim\limits_{x\to0^+}y(x)=\pm\infty$.

Au contraire, lorsque $\lambda=0$, on a $y=F$ donc y tend vers $\varphi(0)$ en 0. Ainsi, F est la seule solution de (E) qui admette une limite finie en 0^+ égale à $\varphi(0)$.

f. On sait déjà que F est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour savoir si c'est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$, il faut regarder si la relation $(1-\mathrm{e}^{-x})y'(x)+y(x)=\varphi(x)$ est vérifiée en 0 pour $y=F$.

Or : $(1-\mathrm{e}^{-0})F'(0)+F(0)=(1-1)\dfrac{\varphi'(0)}{2}+\varphi(0)=\varphi(0)$,

Donc F est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

2. **a.** Pour tout $x>0$, on a : $\quad F(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}$

En 0, on a $F(0)=\varphi(0)=1$. Donc : $\forall x\geq0,\quad F(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1} & \text{si } x>0,\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}$

On a
$$\mathrm{e}^x-1 = \Big(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\underset{x\to0^+}{o}(x^2)\Big)-1 = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\underset{x\to0^+}{o}(x^2)$$

Donc, pour tout $x>0$,
$$\frac{x}{\mathrm{e}^x-1} = \frac{x}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\underset{x\to0^+}{o}(x^2)} = \frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\underset{x\to0^+}{o}(x^2)}$$

Ce qui donne $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1} = 1-\Big(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6}\Big)+\Big(\dfrac{x}{2}\Big)^2+\underset{x\to0^+}{o}(x^2) = 1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{12}+\underset{x\to0^+}{o}(x^2)$ donc $F(x)=1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{12}+\underset{x\to0^+}{o}(x^2)\cdot$

ii. On a de plus que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $F'(x)=-\dfrac{(x-1)\mathrm{e}^{x}+1}{(\mathrm{e}^{x}-1)^2}$ dont seul le signe du numérateur est à étudier.

On peut étudier le signe de ce dernier à l'aide de la fonction $x \longmapsto (x-1)\mathrm{e}^{x}+1$ dont on étudie les variations, pour établir qu'il est strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où le signe de $F'(x)$.
Pour compléter l'étude de F, il reste à regarder son comportement asymptotique en $+\infty$. Or, d'après le théorème des croissances comparées, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x-1} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$

On peut alors dresser le tableau de variations de F :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $F'(x)$	$-\frac{1}{2}$ $\qquad$ $-$
Variations de F	$1 \searrow 0$

3. a. Soit la fonction $g(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 1$ définie sur $[4;+\infty[$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[4;+\infty[$ d'après les théorèmes généraux.
On a : $\forall x \geq 4,\ g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{2} - 1$ et $g''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{4} \geq 0$.
Par suite, g' est croissante. Or $g'(4) = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - 1 \geq 0$, donc : $\forall x \geq 4,\ g'(x) \geq 0$ ce qui implique que g est croissante sur $[4;+\infty[$.
Comme $g(4) = \mathrm{e}^2 - 5 \geq 0$, on en déduit que g est positive sur $[4;+\infty[$ et donc que : $\forall x \geq 4, \quad x \leq \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1$.
Par conséquent, pour tout $x \geq 4$, on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x}{\mathrm{e}^x-1} \leq \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1}{\mathrm{e}^x-1} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1}{(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1)(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+1)} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+1} \leq \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

donc $\forall x \geq 4, \quad F(x) \leq \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

Comme Φ est la primitive de F qui s'annule en 0, on peut écrire que $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t$ ce qui prouve immédiatement que Φ est positive sur $\mathbb{R}_+$ puisque c'est l'intégrale de la fonction F qui est positive (positivité de l'intégrale). Par ailleurs, Φ étant continue sur le segment $[0;4]$, elle est bornée sur ce segment par une constante $M_1 \geq 0$. Lorsque $x \geq 4$, on écrit que :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_0^4 F(t)\,\mathrm{d}t + \int_4^x F(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^4 F(t)\,\mathrm{d}t + \int_4^x \mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^4 F(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x/2} - \mathrm{e}^{-2} \\ &\leq \underbrace{\int_0^4 F(t)\,\mathrm{d}t + 1}_{=M_2}. \end{aligned}$$

En combinant ces résultats, on obtient que $\forall x \geq 0,\ 0 \leq \Phi(x) \leq \max\{M_1; M_2\}$, ce qui démontre bien que Φ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}_+$.

b. La fonction Φ est bien évidemment dérivable puisque c'est une primitive et l'on a $\forall x \geq 0,\ \Phi'(x) = F(x) > 0$. Cela prouve que Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction Φ étant croissante et bornée, on peut affirmer, en vertu du théorème de la limite monotone, que $\Phi(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.