À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [0909] | 1| Condition d'inversibilité

Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice $A(\alpha)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&\alpha\end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Calculer son inverse dans ce cas.

Éléments de correction

Étude de l'inversibilité de $A(\alpha)$ en fonction de α : La matrice $A(\alpha)\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible si, et seulement si, $\operatorname{rg}(A(\alpha))=3$.

Un échelonnement en ligne de $A(\alpha)$ donne :

$$A(\alpha)\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\sim_L}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&\alpha-1\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\sim_L}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&\alpha-7\end{pmatrix}$$

Par suite, le rang de A est égal à 3 si, et seulement si $\alpha-7\neq0$ c'est à dire $\alpha\neq7$.

La matrice $A(\alpha)$ est inversible si, et seulement si $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{7\}$.

Recherche de l'inverse de la matrice $A(\alpha)$: Soit alors $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{7\}$.

On recherche l'inverse de la matrice $A(\alpha)$ en échelonnement en ligne la matrice augmentée $(A(\alpha)|I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&4&0&1&0\\1&3&\alpha&0&0&1\end{array}\right)\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&3&-1&1&0\\0&2&\alpha-1&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&3&-1&1&0\\0&0&\alpha-7&1&-2&1\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{\text{Puisque } \alpha-7\neq0 \text{ on fait :}\\L_2\leftarrow(\alpha-7)L_2-3L_3\\L_1\leftarrow(\alpha-7)L_1-L_3}}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha-7&\alpha-7&0&\alpha-8&2&-1\\0&\alpha-7&0&4-\alpha&\alpha-1&-3\\0&0&\alpha-7&1&-2&1\end{array}\right)$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha-7&0&0&2\alpha-12&3-\alpha&2\\0&\alpha-7&0&4-\alpha&\alpha-1&-3\\0&0&\alpha-7&1&-2&1\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{\text{et comme on a}\\\text{toujours } \alpha-7\neq0\\L_1\leftarrow\frac{1}{\alpha-7}L_1\\L_2\leftarrow\frac{1}{\alpha-7}L_2\\L_3\leftarrow\frac{1}{\alpha-7}L_3}}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{2\alpha-12}{\alpha-7}&\frac{3-\alpha}{\alpha-7}&\frac{2}{\alpha-7}\\0&1&0&\frac{4-\alpha}{\alpha-7}&\frac{\alpha-1}{\alpha-7}&-\frac{3}{\alpha-7}\\0&0&1&\frac{1}{\alpha-7}&-\frac{2}{\alpha-7}&\frac{1}{\alpha-7}\end{array}\right)$$

Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{7\}$, la matrice $A(\alpha)$ est inversible d'inverse la matrice

$$(A(\alpha))^{-1}=\frac{1}{\alpha-7}\begin{pmatrix}2\alpha-12&3-\alpha&2\\4-\alpha&\alpha-1&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4494] | 2| Suites imbriquées

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données par $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n + \frac{2}{3}v_n - \frac{4}{3}w_n \\ v_{n+1} & = & -3u_n + \frac{5}{3}v_n + \frac{5}{3}w_n \\ w_{n+1} & = & -\frac{3}{2}u_n + \frac{2}{3}v_n + \frac{7}{6}w_n \end{array}\right.$$

On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(1). Justifier qu'il existe un unique $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X_0 = aC_1 + bC_2 + cC_3$.

(2). Déterminer $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3). Calculer AC_1, AC_2 et AC_3.

(4). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = a\left(\frac{5}{2}\right)^n C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^n C_3$

Éléments de correction

(1). On désigne par $\mathcal{F} = (C_1, C_2, C_3)$ qui est donc une famille de 3 vecteurs de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3.

Le théorème de caractérisation des bases de vecteurs par le rang de la famille donne ici que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, cette famille est de rang 3.

En désignant par $\mathcal{B}_C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on sait que $\mathrm{rg}\,(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{F}))$.

Or par définition : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Un échelonnement en ligne donne :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est triangulaire supérieure avec tous ses termes diagonaux non nuls. Elle est donc, puisque élément de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, de rang 3.

La famille $\mathcal{F} = (C_1, C_2, C_3)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et il existe donc un unique triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X_0 = aC_1 + bC_2 + cC_3$.

(2). Soit $n \in \mathbb{N}$.

En remarquant que $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$, il vient que :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -3 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{7}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_n + \frac{2}{3}v_n - \frac{4}{3}w_n \\ -3u_n + \frac{5}{3}v_n + \frac{5}{3}w_n \\ -\frac{3}{2}u_n + \frac{2}{3}v_n + \frac{7}{6}w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= X_{n+1} \end{aligned}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -3 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$ est telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

(3). Calcul de AC_1 : un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} AC_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{5}{2}C_1 \end{aligned}$$

Calcul de AC_2 : un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} AC_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= C_2 \end{aligned}$$

Calcul de AC_3 : un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} AC_3 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}C_3 \end{aligned}$$

On trouve que $AC_1 = \frac{5}{2}C_1$, $AC_2 = C_2$ et $AC_3 = \frac{1}{3}C_3$.

(4). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $X_n = a\left(\frac{5}{2}\right)^n C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^n C_3$ ».

Montrons par récurrence sur l'entier n que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

Initialisation : au rang 0, on a $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ c'est à dire $X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Or on a :
$$\begin{aligned} a\left(\frac{5}{2}\right)^0 C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^0 C_3 &= aC_1 + bC_2 + cC_3 \\ &\underset{\text{quest. 1}}{=} X_0 \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $X_0 = a\left(\frac{5}{2}\right)^0 C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^0 C_3$ et la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a la propositon $\mathcal{P}(n)$, et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

On sait que $X_{n+1} = AX_n$. Par suite, par hypothèse de récurrence, on en déduit que : $X_{n+1} = A \times \left(a\left(\frac{5}{2}\right)^n C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^n C_3\right)$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= A \times \left(a\left(\frac{5}{2}\right)^n C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^n C_3\right) \\ &= a\left(\frac{5}{2}\right)^n AC_1 + bAC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^n AC_3 \\ &= a\left(\frac{5}{2}\right)^n \times \frac{5}{2}C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{3}C_3 \\ &= a\left(\frac{5}{2}\right)^{n+1} C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} C_3 \end{aligned}$$

et ainsi on a la proposition $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0, et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

On a bien établi que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = a\left(\frac{5}{2}\right)^n C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^n C_3$