Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . . **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2381

Dans cet exercice, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.
Soient $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ trois droites d'équations respectives :

$$\mathcal{D}_1 :\ -2x-3y+19=0, \qquad \mathcal{D}_2 :\ x+5y-20=0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}_3 :\ 3x-y-12=0$$

1. Montrer que les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont sécantes en un même point $A\left(x_A, y_A\right)$ dont on déterminera les coordonnées.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_4$ qui passe par A et le point $B\left(3,-1\right)$.
3. Déterminer deux réels λ et μ tels que $\lambda(-2x-3y+19)+\mu(x+5y-20)=3x-y-12$.
4. Faire de même avec l'équation cartésienne de $\mathcal{D}_4$ trouvée à la question précédente.
5. Toutes les droites dont une équation cartésienne est de la forme $\lambda(-2x-3y+19)+\mu(x+5y-20)=0$ passent-elles par A ? Justifier votre réponse.
6. Quel résultat pourrait-on conjecturer et énoncer à l'issue de cet exercice ?

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2328

Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$. On définit la fonction f_n par : $\quad f_n : \left|\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n+1-nx \end{array}\right.$.

1. **Étude de l'équation** $f_n(x)=0$ **:**
   - **a.** Calculer $f_n'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   - **b.** Montrer que f_n est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;1]$, et dresser son tableau de variation sur cet intervalle.
   - **c.** Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0;1[$, notée x_n.
2. **Étude de la suite** $\left(x_n\right)_{n\geq 2}$ **:**
   On rappelle que pour $n\geq 2$, x_n est l'unique réel de l'intervalle $]0;1[$ qui vérifie $f_n\left(x_n\right)=0$.
   On définit ainsi une suite $\left(x_n\right)_{n\geq 2}$ de réels.
   - **a.** Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$. Calculer $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $f_n\left(\dfrac{2}{n}\right)$.
   - **b.** En déduire un encadrement de x_n et la limite de $\left(x_n\right)_{n\geq 2}$.
   - **c.** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_n\right)^n=0$.
     On pourra revenir à une écriture exponentielle de cette puissance.
   - **d.** Montrer alors que $nx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   - **e.** En déduire un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   - **f.** Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$.
     - **i.** Étudier le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ pour $x\in[0;1]$.
     - **ii.** En déduire alors le signe de $f_{n+1}\left(x_n\right)$.
     - **iii.** Étudier alors la monotonie de la suite $\left(x_n\right)_{n\geq 2}$.