Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . . **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2325

La famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ de $\mathbb{R}^4$ formée des vecteurs $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2\,(3,1,3,1)$, $u_3 = (3,-1,-1,3)$ et $u_4 = (2,5,4,3)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$? Déterminer le cas échéant une relation de dépendance entre ces quatre vecteurs.

EX. 2 | Réf. 2326

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par les relations : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -\dfrac{1}{u_n + 2} \end{cases}$

1. Montrer par récurrence sur $n \geq 1$, que u_n est bien défini et $-1 < u_n < 0$.

2. On considère alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par la relation $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$.

a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et arithmétique.

b. Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2323

On définit la suite $(p_n)_{n\geq 3}$ par : $\quad \forall n \geq 3, \quad p_n = \dfrac{\sum_{k=0}^{n} k!}{n!}$

1. Soit $n \geq 3$. Montrer que pour tout $k \in [\![0; n-2]\!]$, $\quad \dfrac{k!}{n!} \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$.

2. En déduire un encadrement de p_n pour tout $n \geq 3$.

3. Déterminer alors la limite de $(p_n)_{n\geq 3}$.