Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1596

Dans tout ce qui suit, n désigne un entier naturel non nul. On définit alors une application φ par :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 t^2 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1578

1. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

On admet que l'application φ définie par $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soient $h : x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $H_n : x \longmapsto (-1)^n \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} h^{(n)}(x)$.

a. Trouver une relation entre H_{n+1}, H_n et H'_n.

b. Montrer que H_n est un polynôme de degré n.
Les polynômes H_n sont appelés les polynômes de Hermite.

c. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad H_{n+1} = XH_n + nH_{n-1}$$

et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H'_n = nH_{n-1}$.

d. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_k(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 0.$

3. Montrer que les polynômes d'Hermite sont orthogonaux pour le produit scalaire défini précédemment.