Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . .**On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 1596

Dans tout ce qui suit, n désigne un entier naturel non nul. On définit alors une application φ par :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 t^2 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

EX. 2 | Réf. 1571

On définit l'application $\langle \bullet \,|\bullet \rangle$ sur $\mathbb{R}_2[X]\times\mathbb{R}_2[X]$ par : $\langle \bullet \,|\bullet \rangle : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & P(0)\times Q(0) + P'(0)\times Q'(0) + P''(0) \times Q'' \end{array} \right.$

et on admet que $\langle \bullet \,|\bullet \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Calculer, pour tout couple $(i,j) \in [\![0;2]\!]^2$, le réel $a_{i,j} = \left\langle X^i \,\middle|\, X^j \right\rangle$.
2. En déduire une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour $\langle \bullet \,|\bullet \rangle$.
3. Soit F et G les sous-espaces de $\mathbb{R}_2[X]$ définis par : $F = \mathrm{Vect}\left(1+X, X^2\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(1-X)$.
   Montrer que F et G sont orthogonaux pour $\langle \bullet \,|\bullet \rangle$.

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 1420

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \bullet \,|\bullet \rangle$, de dimension 3, et on suppose que a est un vecteur unitaire de E, et que $k \in \mathbb{R}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k pour que $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \langle u\,|v\rangle + k\,\langle u\,|a\rangle\,\langle v\,|a\rangle \end{array} \right.$
soit un produit scalaire sur E.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 1593

Soit $E = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \text{la série numérique} \displaystyle\sum_{n\geq 1} x_n^2 \text{ converge} \right\}$.

1. Soit $\left((x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}\right) \in E\times E$. On définit la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z_n = x_n + y_n$.
   Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq z_n^2 \leq 2\left(x_n^2 + y_n^2\right)$.
   Qu'en déduire pour $(z_n)_{n\geq 1}$?
2. Montrer que E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
3. Soit $\left((x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}\right) \in E\times E$.
   Montrer que la série numérique $\sum x_n y_n$ est convergente.

4. On définit alors sur E l'application : $\langle \bullet | \bullet \rangle : \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left((x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}\right) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n \end{array} \right.$

Montrer que $\langle \bullet | \bullet \rangle$ est un produit scalaire sur E.

5. Montrer que si $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont des éléments de E, alors : $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n\right)^2 \leq \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2\right)\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} y_n^2\right)$

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 0881

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne orientée canonique.
Soit $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^3$ non nul. On définit alors l'application φ :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \overrightarrow{x} & \longmapsto & \overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x}\right) \end{array} \right.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$.
On pourra admettre que : $\forall \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad \overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}\right) = \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{c} \right\rangle \overrightarrow{b} - \left\langle \overrightarrow{a} \middle| \overrightarrow{b} \right\rangle \overrightarrow{c}$

3. Montrer que φ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que $\overrightarrow{a}$ est un vecteur propre pour φ et en donner la valeur propre associée.

5. Montrer que $-\left\|\overrightarrow{a}\right\|^2$ est une valeur propre de φ et caractériser le sous-espace propre associé.
Donner alors tous les sous-espaces propres de φ.

6. On suppose dans cette question que $\left\|\overrightarrow{a}\right\| = 1$.

a. Montrer que l'on a $\varphi \circ \varphi = -\varphi$.

b. Caractériser géométriquement φ.