Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . .**On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Je m'entraîne à rédiger

EX. 1 | Réf. 4385

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.
Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur Ω telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
On suppose que la loi de X est donnée par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3\mathbb{P}([X = n+2]) = 4\mathbb{P}([X = n+1]) - \mathbb{P}([X = n])$

1. Démontrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X = n]) = \alpha + \beta \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
2. Déterminer (α, β) et expliciter alors la loi de X.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = X + 1$.
4. En déduire que X admet une espérance et une variance et en donner leurs valeurs.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4383

On considère la matrice M définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i) l'événement « on obtient une boule blanche (respectivement rouge) lors du i^e tirage ».
Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du n^e tirage et on pose $X_0 = 2$.
On note enfin T_1 le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche, et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.
On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ permettant de modéliser cette expérience, et que X_n, T_1 et T_2 sont des variables aléatoires définies sur cet espace, et où $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω, c'est à dire l'ensemble des événements.
On considère les quatre matrices colonnes suivantes :

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 0]) \\ \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) \end{pmatrix} \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. **a.** Déterminer pour tout entier naturel n, l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X_n (on distinguera les trois cas $n = 0$, $n = 1$ et $n \geq 2$).

   b. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a l'égalité suivante :

   $$U_{n+1} = MU_n$$

   Vérifier que l'égalité précédente reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

   c. Calculer MV_1, MV_2 et MV_3.

d. En déduire par récurrence, pour tout entier naturel n, la relation suivante :

$$U_n = V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3$$

e. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n.

2. Calculer $E(X_n)$, espérance de X_n, ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Reconnaître la loi de T_1.

4. Écrire les événements $[T_2 = 2]$ et $[T_2 = 3]$ à l'aide de certains des événements B_i, et en déduire les valeurs des probabilités $\mathbb{P}([T_2 = 2])$ et $\mathbb{P}([T_2 = 3])$.

5. **a.** Pour tout entier $n \geq 2$, écrire l'événement $[T_2 = n]$ en fonction des événements $[X_{n-1} = 1]$ et $[X_n = 0]$.

b. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\mathbb{P}([T_2 = n]) = 2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 4384

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. On considère l'application f, qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe le polynôme $f(P) = P'' - 4XP'$.

1. Étude de f : soit n un entier naturel fixé uniquement dans cette question.

a. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Calculer $f(1)$, $f(X)$ puis $f\left(X^k\right)$ pour $k \in [\![2; n]\!]$.
Établir alors que la matrice A_n de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire.

c. Prouver que f est diagonalisable et que chacun de ses espaces propres et de dimension 1.

d. Soit P un vecteur propre d ef associé à la valeur propre λ.
Établir que $\lambda = -4\deg(P)$.
En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire H_n de degré n tel que :

$$(\mathcal{E}_n) : \quad f(H_n) = -4nH_n$$

2. Étude de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a. Établir en dérivant la relation $(\mathcal{E}_n)$, démontrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad f(H_n') = -4(n-1)H_n'$$

En déduire alors que :

$$\forall n \geq 1, \quad H_n' = nH_{n-1} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad H_n - XH_{n-1} + \frac{(n-1)H_{n-2}}{4} = 0$$

b. Pourquoi peut-on affirmer que $H_0 = 1$ et $H_1 = X$?
Calculer alors H_2 et H_3.

c. D'après ce qui précède, la suite $u_n = H_n(1)$ satisfait à la relation de récurrence :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad u_n = u_{n-1} - \frac{(n-1)u_{n-2}}{4}$$

Écrire un programme en `Python` calculant u_{2010}.