Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Travail facultatif

Un peu de technique

Exercice| [4963] | 1| Inverse d'une matrice à bandes| ENS Ulm 2019 Filière BL

Soit $n \geq 1$ un entier.

(1). Soit $p \geq 1$ un entier. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} n^{i-1} = \frac{(n+1)^p - 1}{n}$.

(2). Soit A la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Calculer A^p pour $p \geq 1$.

(3). Soit $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ la matrice carrée de taille n définie par :

$$b_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Calculer B^p pour $p \geq 1$.

(4). Montrer que B est inversible et calculer son inverse.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4983] | 2| Diagonalisation simultanée | ENSAE 2021 Filière BL

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(1). Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

(2). Soit $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AB - BA = A$.

(a). Déterminer des conditions sur les coefficients de B.

(b). En déduire que B est diagonalisable et déterminer le sous-espace propre associé à la plus petite de ses valeurs propres.

(3). On considère $V \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $UV - VU = U$.

(a). Montrer, sans calculer P^{-1}, que P est inversible et que $U = PAP^{-1}$.

(b). Montrer que V est diagonalisable et déterminer le sous-espace propre associé à la plus petite de ses valeurs propres.

Exercice| [4984] | 3| Étude d'une variable aléatoire à densité | ENS ULM 2018 Filière BL

Soit X une variable aléatoire à densité notée f, à support dans $\mathbb{R}_+$. Les deux jeux J_1 et J_2 suivants vous sont proposés. Vous commencez par choisir un nombre $c > 0$.

Jeu J_1 : si $X > c$, vous gagnez c, sinon rien.

Jeu J_2 : si $X > c$, vous gagnez c, sinon vous perdez c.

On note $G_1(x)$ l'espérance du gain dans le jeu J_1 et $G_2(c)$ l'espérance du gain dans le jeu J_2.

(1). On suppose uniquement dans cette question que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On note $m_1 = \sup\limits_{c>0} G_1(c)$ la plus grande espérance possible de votre gain dans le jeu J_1 et soit $m_2 = \sup\limits_{c>0} G_2(c)$ la plus grande espérance possible de votre gain dans le jeu J_2.

(a). Déterminer la valeur de m_1.

(b). Comparer m_1 et m_2.

(2). Montrer que $\sup\limits_{c>0} G_2(0)$ est un nombre réel strictement positif.

(3). On suppose que X admet une espérance. Montrer que $\sup\limits_{c>0} G_1(c)$ est un nombre fini.

(4). A-t-on toujours $\sup\limits_{c>0} G_1(c)$ fini ?