Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [5096] | 1| Puissance d'une matrice

On se propose de déterminer une expression de la matrice A^n où $n \in \mathbb{N}$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(1). Déterminer deux matrices B et C de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $\begin{cases} B + C = A \\ -B + \dfrac{1}{3}C = \mathrm{I}_2 \end{cases}$

(2). Calculer BC et CB.

(3). Sans justification, exprimer B^n et C^n en fonction de B, C et $n \in \mathbb{N}^*$ uniquement.

(4). Déterminer alors une expression de A^n en fonction de n, B et C.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5097] | 2| De $\mathbb{R}^3$ à des fonctions polynôme de degré 2

Dans tout cet exercice, on désigne par F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ a+b+c = 0 \text{ et } 2a+b = 0\right\}$$

(1). Montrer que F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(2). Démontrer que F est une droite vectorielle dont on déterminera un vecteur e générateur.

(3). Pour tout $u = (a,b,c)$ élément quelconque de F, on considère la fonction polynôme f_u de degré 2 définie par :

$$f_u : x \longmapsto ax^2 + bx + c$$

Dans ce qui suit, u désignera un vecteur quelconque de F.

(a). Démontrer que $f_u\,(1) = 0$ et $f'_u\,(1) = 0$.

(b). Justifier qu'il existe un réel α tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_u(x) = \alpha f_e(x)$.