Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1| Réf. 2383

Donner un équivalent simple du terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\mathrm{e}^{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1} - 1\right)\left(1 - \cos\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)\right).$$

EX. 1| Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2383

- Décomposer chaque terme de sorte à faire apparaître des équivalents usuels est le seul conseil que je peux vous donner...

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2| Réf. 3282

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. On définit la fonction f_n par : $f_n : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n + 1 - nx \end{array}\right.$.

1. **Étude de l'équation $f_n(x) = 0$:**
   - **a.** Calculer $f_n'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   - **b.** Montrer que f_n est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;1]$, et dresser son tableau de variation sur cet intervalle.
   - **c.** Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0;1[$, notée x_n.
2. **Étude de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$:**
   On rappelle que pour $n \geq 2$, x_n est l'unique réel de l'intervalle $]0;1[$ qui vérifie $f_n(x_n) = 0$.
   On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 2}$ de réels.
   - **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Calculer $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$ et $f_n\left(\frac{2}{n}\right)$.
   - **b.** En déduire un encadrement de x_n et la limite de $(x_n)_{n\geq 2}$.
   - **c.** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = 0$.
     On pourra revenir à une écriture exponentielle de cette puissance.
   - **d.** Montrer alors que $nx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   - **e.** En déduire un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EX. 2| Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3282

1. **a.** Ne pas oublier que n est une constante !
   b. Il s'agit d'étudier le signe de la dérivée sur l'intervalle proposé...
   c. Utiliser correctement le théorème des valeurs intémédiaires cas strictement monotone.
2. **a.** RAS
   b. Remarquer que parmi les deux valeurs calculées précédemment, l'une est positive et l'autre négative...
   c. Suivre l'indication donnée...

d. Utiliser la définition de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ comme solution d'une équation...

e. Exploiter simplement le résultat précédent.