Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2381

Dans cet exercice, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Soient $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ trois droites d'équations respectives :

$$\mathcal{D}_1 : -2x-3y+19=0, \qquad \mathcal{D}_2 : x+5y-20=0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}_3 : 3x-y-12=0$$

1. Montrer que les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont sécantes en un même point $A\left(x_A, y_A\right)$ dont on déterminera les coordonnées.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_4$ qui passe par A et le point $B\left(3,-1\right)$.
3. Déterminer deux réels λ et μ tels que $\lambda(-2x-3y+19)+\mu(x+5y-20)=3x-y-12$.
4. Faire de même avec l'équation cartésienne de $\mathcal{D}_4$ trouvée à la question précédente.
5. Toutes les droites dont une équation cartésienne est de la forme $\lambda(-2x-3y+19)+\mu(x+5y-20)=0$ passent-elles par A ? Justifier votre réponse.
6. Quel résultat pourrait-on conjecturer et énoncer à l'issue de cet exercice ?

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2381

1. Déterminer le point d'intersection (éventuel) de deux des trois droites, puis s'assurer que ce dernier appartient à la troisième.
2. Il s'agit de déterminer une équation cartésienne d'une droite qui passe par deux points...
3. Identifier les deux membres de cette relation serait une bonne piste...
4. Refaire le même travail.
5. Comment vérifie-t-on qu'un point appartient à une droite...
6. S'inspirer de la question 3.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2328

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On définit la fonction f_n par : $\quad f_n : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n+1-nx \end{array} \right.$.

1. **Étude de l'équation $f_n(x)=0$:**
   - **a.** Calculer $f_n'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   - **b.** Montrer que f_n est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;1]$, et dresser son tableau de variation sur cet intervalle.
   - **c.** Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0;1[$, notée x_n.
2. **Étude de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$:**
   On rappelle que pour $n \geq 2$, x_n est l'unique réel de l'intervalle $]0;1[$ qui vérifie $f_n\left(x_n\right)=0$.
   On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 2}$ de réels.
   - **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Calculer $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $f_n\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

b. En déduire un encadrement de x_n et la limite de $(x_n)_{n\geq 2}$.

c. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = 0$.

On pourra revenir à une écriture exponentielle de cette puissance.

d. Montrer alors que $nx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

e. En déduire un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

f. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

- **i.** Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour $x \in [0;1]$.
- **ii.** En déduire alors le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
- **iii.** Étudier alors la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2328

1. Étudier les variations d'une fonction.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.
3. Encadrer le terme général d'une suite.
4. Se souvenir que $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$.
5. Savoir ce que signifie $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
6. Savoir faire une étude de signe qui dépend d'un paramètre.
7. Étudier les variations d'une suite.