Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2325

La famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ de $\mathbb{R}^4$ formée des vecteurs $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2\,(3,1,3,1)$, $u_3 = (3,-1,-1,3)$ et $u_4 = (2,5,4,3)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$? Déterminer le cas échéant une relation de dépendance entre ces quatre vecteurs.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2325

- On peut travailler avec la matrice associée à la famille de vecteurs...
- l'échelonner pour en déterminer le nombre de pivots...
- et poursuivre ou non l'échelonnement pour obtenir la relation de dépendance voulue.

EX. 2 | Réf. 2326

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par les relations : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -\dfrac{1}{u_n+2} \end{cases}$

1. Montrer par récurrence sur $n \geq 1$, que u_n est bien défini et $-1 < u_n < 0$.

2. On considère alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par la relation $v_n = \dfrac{1}{u_n+1}$.

a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et arithmétique.

b. Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2326

- L'expression donnant u_{n+1} en fonction de u_n pose problème lorsque $u_n = -2$. Il faut donc s'assurer à travers un raisonnement par récurrence que ceci n'arrive jamais et que le processus de construction définissant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi parfaitement licite.
- Cette remarque vaut encore pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mais la réponse est ici directe.
- Pour le caractère arithmétique de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, revenir à la définition.
- On utilise ensuite les formules du cours donnant le terme général d'une suite arithmétique en fonction de n.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2323

On définit la suite $(p_n)_{n\geq 3}$ par : $\quad \forall n \geq 3, \quad p_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!}{n!}$

1. Soit $n \geq 3$. Montrer que pour tout $k \in [\![0; n-2]\!]$, $\quad \dfrac{k!}{n!} \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$.

2. En déduire un encadrement de p_n pour tout $n \geq 3$.

3. Déterminer alors la limite de $(p_n)_{n\geq 3}$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2323

- Remarquer (et le prouver...) que nécessairement $k! \leq (n-2)!$.
- « Fractionner » le quotient définissant p_n et majorer chacun des termes obtenus.
- $\dfrac{(n-1)!}{n!}$ se simplifie bien !
- Utiliser le théorème des gendarmes.