Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1596

Dans tout ce qui suit, n désigne un entier naturel non nul. On définit alors une application φ par :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 t^2 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1596

- Le caractère symétrique est immédiat et le caractère linéaire à gauche (ou à droite) provient de la linéarité de l'intégrale.
- De même, le caractère positif provient de la positivité de l'intégrale, mais on n'oubliera pas de donner les deux arguments essentiels à cela.
- Le caractère défini provient là encore d'une propriété de l'intégrale, puis surtout d'un résultat sur les polynômes !

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1578

1. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

On admet que l'application φ définie par $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soient $h : x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $H_n : x \longmapsto (-1)^n \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} h^{(n)}(x)$.

a. Trouver une relation entre H_{n+1}, H_n et H_n'.

b. Montrer que H_n est un polynôme de degré n.
Les polynômes H_n sont appelés les polynômes de Hermite.

c. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad H_{n+1} = XH_n + nH_{n-1}$$

et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n' = nH_{n-1}$.

d. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_k(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 0.$

3. Montrer que les polynômes d'Hermite sont orthogonaux pour le produit scalaire défini précédemment.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1578

1. Chercher un équivalent d'une expression du type $P(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

2. a. On exprime les trois expressions et on les combine.

b. On effectue un raisonnement par récurrence sur le degré de H_n.

c. La formule de Leibniz. . .

d. On intègre en utilisant les dérivées ne de h.

3. On calcule tous les produits scalaires nécessaires...