Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Je m'entraîne à rédiger

EX. 1 | Réf. 4385

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.
Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur Ω telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
On suppose que la loi de X est donnée par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3\mathbb{P}([X = n+2]) = 4\mathbb{P}([X = n+1]) - \mathbb{P}([X = n])$

1. Démontrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X = n]) = \alpha + \beta \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
2. Déterminer (α, β) et expliciter alors la loi de X.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = X + 1$.
4. En déduire que X admet une espérance et une variance et en donner leurs valeurs.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4385

1. En notant $p_n = \mathbb{P}([X = n])$, on reconnaîtra une suite récurrence linéaire d'ordre 2.
2. On exploitera le fait que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) = 1$ en passant par la suite des sommes partielles de la série.
3. Expliciter $\mathbb{P}([Y = k])$ à l'aide de $\mathbb{P}([X = k-1])$ et reconnaître la loi de Y directement.
4. La linéarité de l'espérance donne la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et on détermine sa variance sur le même principe.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4383

On considère la matrice M définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i) l'événement « on obtient une boule blanche (respectivement rouge) lors du i^e tirage ».
Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du n^e tirage et on pose $X_0 = 2$.
On note enfin T_1 le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche, et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.
On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ permettant de modéliser cette expérience, et que X_n, T_1 et T_2 sont des variables aléatoires définies sur cet espace, et où $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω, c'est à dire l'ensemble des événements.

On considère les quatre matrices colonnes suivantes :

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 0]) \\ \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) \end{pmatrix} \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. **a.** Déterminer pour tout entier naturel n, l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X_n (on distinguera les trois cas $n = 0$, $n = 1$ et $n \geq 2$).
   b. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a l'égalité suivante :
   $$U_{n+1} = MU_n$$
   Vérifier que l'égalité précédente reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.
   c. Calculer MV_1, MV_2 et MV_3.
   d. En déduire par récurrence, pour tout entier naturel n, la relation suivante :
   $$U_n = V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3$$
   e. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n.
2. Calculer $E(X_n)$, espérance de X_n, ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Reconnaître la loi de T_1.
4. Écrire les événements $[T_2 = 2]$ et $[T_2 = 3]$ à l'aide de certains des événements B_i, et en déduire les valeurs des probabilités $\mathbb{P}([T_2 = 2])$ et $\mathbb{P}([T_2 = 3])$.
5. **a.** Pour tout entier $n \geq 2$, écrire l'événement $[T_2 = n]$ en fonction des événements $[X_{n-1} = 1]$ et $[X_n = 0]$.
   b. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a :
   $$\mathbb{P}([T_2 = n]) = 2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4383

1. **a.** Il s'agit pour le cas $n = 0$, $n = 1$ puis $n \geq 2$ d'analyser l'état de l'urne avant le tirage.
   b. On décompose l'évément $[X_{n+1} = 0]$ en fonction de l'événement $[X_n = 0]$ et $[X_n = 1]$, puis on fait de même avec les autres valeurs prises par X_{n+1}.
   c. Il s'agit donc d'effectuer les produits matriciels demandés.
   d. C'est un raisonnement par récurrence à faire sur la suite de matrices colonnes.
   e. On explicite alors $\mathbb{P}([X = 0])$, $\mathbb{P}([X_n = 1])$, …à partir des résultats précédents.
2. X_n étant à support fini, son expérance (existe et) se calcule directement.
3. T_1 est définie comme étant le rang d'apparition d'un événement…
4. On décompose les événements $[T_2 = 2]$ et $[T_2 = 3]$ comme intersection d'événements B_i et on utilise la formule des probabilités composées pour les calculer.
5. **a.** C'est direct dès lors que l'on analyse l'état de l'urne.
   b. On utilise la formule des probabilités composées pour conclure.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 4384

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. On considère l'application f, qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe le polynôme $f(P) = P'' - 4XP'$.

1. **Étude de f :** soit n un entier naturel fixé uniquement dans cette question.
   a. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Calculer $f(1)$, $f(X)$ puis $f\left(X^k\right)$ pour $k \in [\![2;n]\!]$.
Établir alors que la matrice A_n de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire.

c. Prouver que f est diagonalisable et que chacun de ses espaces propres et de dimension 1.

d. Soit P un vecteur propre d ef associé à la valeur propre λ.
Établir que $\lambda = -4\deg(P)$.
En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire H_n de degré n tel que :

$$(\mathcal{E}_n): \quad f\left(H_n\right) = -4nH_n$$

2. Étude de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a. Établir en dérivant la relation $(\mathcal{E}_n)$, démontrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad f\left(H_n'\right) = -4(n-1)H_n'$$

En déduire alors que :

$$\forall n \geq 1, \quad H_n' = nH_{n-1} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad H_n - XH_{n-1} + \frac{(n-1)H_{n-2}}{4} = 0$$

b. Pourquoi peut-on affirmer que $H_0 = 1$ et $H_1 = X$?
Calculer alors H_2 et H_3.

c. D'après ce qui précède, la suite $u_n = H_n(1)$ satisfait à la relation de récurrence :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad u_n = u_{n-1} - \frac{(n-1)u_{n-2}}{4}$$

Écrire un programme en `Python` calculant u_{2010}.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf . 4384

1. a. On commence par discuter sur le degré de $f(P)$, puis on s'assure de la linéarité.

b. On calcule les images des vecteurs de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$.

c. La matrice est triangulaire supérieure ce qui facilie l'obtention des valeurs propres.

d. On obtient la valeur de λ en discutant sur le degré de $f(P)$. On obtient l'existence de H_n en partant de la valeur propre $-4n$.

2. a. On dérive la relation $\mathcal{E}_n$ puis on utilise la valeur propre $-4(n-1)$ et le vecteur propre associé.

b. On utilise les valeurs propres de f.

c. Il y a une récursivité à appréhender ici.