À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Travail facultatif

Un peu de technique

Exercice| [4963] | 1| Inverse d'une matrice à bandes| ENS Ulm 2019 Filière BL

Soit $n \geq 1$ un entier.

(1). Soit $p \geq 1$ un entier. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} n^{i-1} = \frac{(n+1)^p - 1}{n}$.

(2). Soit A la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Calculer A^p pour $p \geq 1$.

(3). Soit $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ la matrice carrée de taille n définie par :

$$b_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Calculer B^p pour $p \geq 1$.

(4). Montrer que B est inversible et calculer son inverse.

Pistes de réflexion

(1). On sera amener à mobiliser le binôme de Newton pour développer $(n+1)^p$, dont il faudra peut-être travailler quelques éléments pour voir apparaître la somme cherchée.

(2). On conjecture que $A^p = n^{p-1}A$ qu'il convient de démontrer par récurrence.

(3). On remarque que $B = A + \dots$ et on utilise le binôme de Newton.

(4). On exploite l'expression précédente pour expliciter B^2 en fonction de B et de I_n, ce qui permet d'obtenir une écriture du type $B \times \dots = \mathrm{I}_n$ et donc l'inversibilité et l'inverse de B.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4983] | 2| Diagonalisation simultanée | ENSAE 2021 Filière BL

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(1). Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

(2). Soit $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AB - BA = A$.

(a). Déterminer des conditions sur les coefficients de B.

(b). En déduire que B est diagonalisable et déterminer le sous-espace propre associé à la plus petite de ses valeurs propres.

(3). On considère $V \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $UV - VU = U$.

(a). Montrer, sans calculer P^{-1}, que P est inversible et que $U = PAP^{-1}$.

(b). Montrer que V est diagonalisable et déterminer le sous-espace propre associé à la plus petite de ses valeurs propres.

Pistes de réflexion

(1). La forme de A donne directement l(es) valeur(s) propre(s) de A, et le(s) sous-espaces propres associé(s).

(2).(a). On effectue le calcul $AB - BA$ pour écrire un système de condtions qui donne la forme de B.

(b). La forme de B donne directement l(es) valeur(s) propre(s) de B, et le(s) sous-espaces propres associé(s), puis la diagonalisabilité de B vu le nombre de valeurs propres trouvées.

(3).(a). Un rapidement échelonnement en lignes de P donne son rang, et donc son inversibilité. Pour le reste, on vérifie que $UP = PA$.

(b). On commence par montrer que $U^2 \neq (0)$ et que $U^3 = (0)$, pour pouvoir considérer la famille $\left(U^2X, UX, X\right)$ où $X \notin \mathrm{Ker}\,\left(U^2\right)$ avec $X \neq (0)$. On exprime alors la matrice de V dans cette base, en remarquant que $\dim(\mathrm{Ker}\,(U)) = 1$ et que $U^2V - VU^2 = U^2$.

Exercice|[4984]| 3| Étude d'une variable aléatoire à densité | ENS ULM 2018 Filière BL

Soit X une variable aléatoire à densité notée f, à support dans $\mathbb{R}_+$. Les deux jeux J_1 et J_2 suivants vous sont proposés. Vous commencez par choisir un nombre $c > 0$.

Jeu J_1 : si $X > c$, vous gagnez c, sinon rien.

Jeu J_2 : si $X > c$, vous gagnez c, sinon vous perdez c.

On note $G_1(x)$ l'espérance du gain dans le jeu J_1 et $G_2(c)$ l'espérance du gain dans le jeu J_2.

(1). On suppose uniquement dans cette question que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On note $m_1 = \sup\limits_{c>0} G_1(c)$ la plus grande espérance possible de votre gain dans le jeu J_1 et soit $m_2 = \sup\limits_{c>0} G_2(c)$ la plus grande espérance possible de votre gain dans le jeu J_2.

(a). Déterminer la valeur de m_1.

(b). Comparer m_1 et m_2.

(2). Montrer que $\sup\limits_{c>0} G_2(0)$ est un nombre réel strictement positif.

(3). On suppose que X admet une espérance. Montrer que $\sup\limits_{c>0} G_1(c)$ est un nombre fini.

(4). A-t-on toujours $\sup\limits_{c>0} G_1(c)$ fini ?

Pistes de réflexion

(1).(a). Les deux variables aléatoires ont un support réduit à deux éléments, ce qui simplifie le calcul des espérances correspondantes. Il restera à procéder à une étude de fonctions.

(b). On pourra étudier le signe de $G_1(c) - G_2(c)$.

(2). On pourrait penser que l'on pourrait procéder à l'étude de G_2 comme on a pu le faire pour G_1, mais les calculs s'avèreront difficiles. On fera le lien entre G_2 et la fonction de répartition de X pour obtenir les variations d'une partie de l'expression de G_2 qui permettra ensuite d'obtenir l'existence du majorant de G_2.

(3). On utilise l'expression de $G_1(c)$ que l'on majore à l'aide de la densité de X.

(4). Il s'agit de trouver un contre-exemple, l'idée étant que $G_1(c) \underset{c\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou en 0 par exemple.