**À noter & À garder en tête**

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

## Un peu de technique

### Exercice| [5096] | 1| Puissance d'une matrice

On se propose de déterminer une expression de la matrice $A^n$ où $n \in \mathbb{N}$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

**(1).** Déterminer deux matrices $B$ et $C$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $\begin{cases} B + C = A \\ -B + \frac{1}{3}C = \mathrm{I}_2 \end{cases}$

**(2).** Calculer $BC$ et $CB$.

**(3).** Sans justification, exprimer $B^n$ et $C^n$ en fonction de $B$, $C$ et $n \in \mathbb{N}^*$ uniquement.

**(4).** Déterminer alors une expression de $A^n$ en fonction de $n$, $B$ et $C$.

**Pistes de réflexion**

**(1).** On évitera d'utiliser pour $B$ et $C$ une expression à partir de leurs coefficients pour les déterminer, car on récupèrera *a priori* un système de taille $8 \times 4$. On s'inspirera plutôt de la résolution d'un système linéaire classique...

**(2).** Les deux matrices $B$ et $C$ étant déterminées, on peut alors effectuer les deux produits matriciels qui devraient donner...la matrice nulle.

**(3).** On explicite sur son brouillon les premières puissances de $B$ et $C$, pour conjecturer ensuite une expression en fonction de $n$ mais surtout de $B$ et $C$.

**(4).** Les deux questions précédentes et la décomposition de $A$ comme combinaison de $B$ et $C$ laissent imaginer que l'on pourra mobiliser la formule du binôme de Newton pour obtenir une expression de $A^n$. On n'oubliera pas de gérer le cas $n = 0$ pour les puissances de $B$ et de $C$ et de se rappeler du résultat de la question précdente pour simplifier une grosse partie de la somme...

## Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

### Exercice| [5097] | 2| De $\mathbb{R}^3$ à des fonctions polynôme de degré 2

Dans tout cet exercice, on désigne par $F$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ a + b + c = 0 \text{ et } 2a + b = 0\right\}$$

**(1).** Montrer que $F$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

**(2).** Démontrer que $F$ est une droite vectorielle dont on déterminera un vecteur $e$ générateur.

**(3).** Pour tout $u = (a, b, c)$ élément quelconque de $F$, on considère la fonction polynôme $f_u$ de degré 2 définie par :

$$f_u : x \longmapsto ax^2 + bx + c$$

Dans ce qui suit, $u$ désignera un vecteur quelconque de $F$.

**(a).** Démontrer que $f_u(1) = 0$ et $f'_u(1) = 0$.

**(b).** Justifier qu'il existe un réel $\alpha$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_u(x) = \alpha f_e(x)$.

**Pistes de réflexion**

**(1).** On montrera que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en s'assurant de sa stabilité par combinaison linéaire.

**(2).** On traduira la définition de $F$ à l'aide d'un système qui permettra d'isoler une famille génératrice de $F$, et s'apercevoir que cette dernière ne contient qu'un seul vecteur...

**(3).(a).** On commencera par expliciter $f_u'(x)$, puis on évalue $f_u$ et $f_u'$ en $1$ que l'on mettra ensuite en perspective avec le fait que $u \in F$.

**(b).** On se souviendra que $F$ est une droite vectorielle.