Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2383

Donner un équivalent simple du terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(e^{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1} - 1\right)\left(1-\cos\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)\right).$$

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2383

- Puisque $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et par conséquent $e^{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1$.

  De plus puisque $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{n}$ et par transisitivé $e^{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.
- Puisque $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $1-\cos\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\right)^2}{2}$.

  Or puisque $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

  Ainsi par transitivité, $1-\cos\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^2}{2}$ et donc $1-\cos\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^4}$.
- Finalement par produit d'équivalents $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}\times\dfrac{1}{2n^2}$ c'est à dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^5}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 3282

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. On définit la fonction f_n par : $f_n : \begin{array}{|lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n + 1 - nx \end{array}$.

1. **Étude de l'équation $f_n(x) = 0$:**
   - **a.** Calculer $f_n'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   - **b.** Montrer que f_n est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;1]$, et dresser son tableau de variation sur cet intervalle.
   - **c.** Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0;1[$, notée x_n.
2. **Étude de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$:**

   On rappelle que pour $n \geq 2$, x_n est l'unique réel de l'intervalle $]0;1[$ qui vérifie $f_n(x_n) = 0$.
   On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 2}$ de réels.
   - **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Calculer $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $f_n\left(\dfrac{2}{n}\right)$.
   - **b.** En déduire un encadrement de x_n et la limite de $(x_n)_{n\geq 2}$.
   - **c.** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = 0$.

     On pourra revenir à une écriture exponentielle de cette puissance.
   - **d.** Montrer alors que $nx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   - **e.** En déduire un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 3282

1. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = nx^{n-1} - n = n\left(x^{n-1} - 1\right)$.

b. Pour tout $x \in [0;1]$, $x^{n-1} - 1 \geq 0$ et $x^{n-1} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$.

On en déduit donc le signe et les variations de f_n sur l'intervalle $[0;1]$.

Sur l'intervalle $[0;1]$, f_n' est négatire et ne s'annule qu'une seule fois. Ainsi, f_n est strictement décroissante sur cet intervalle.

c. La fonction f_n est continue sur $[0;1]$, stricement décroissante sur $[0;1]$ et telle que $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = 1 - n < 0$. Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotone, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0;1]$, et comme $f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 0$, cette solution est dans $]0;1[$.

x	0		1
Signe de $f_n'(x)$		$-$	0
Variations de f_n	1	$\searrow$	$1-n$

2. a. On a
$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^n + 1 - n \times \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^n + 1 - n \times \frac{2}{n} = \left(\frac{2}{n}\right)^n - 1$$

b. On remarque que $f_n\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ et $f_n\left(\frac{2}{n}\right) < 0$, donc $\frac{1}{n} \leq x_n \leq \frac{2}{n}$, et par le théorème d'encadrement puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, il vient $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on a $(x_n)^n = \mathrm{e}^{n\ln(x_n)}$. Or $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par composition $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(x_n) = -\infty$. Finalement $n\ln(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et on en déduit que $(x_n)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

d. Puisque x_n est solution de $f_n(x) = 0$, on sait que $(x_n)^n + 1 + nx_n = 0$ soit $nx_n = 1 + (x_n)^n$. Comme $(x_n)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient que $nx_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

e. On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on a $nx_n = \dfrac{x_n}{\frac{1}{n}}$. De $\lim\limits_{n \to +\infty} nx_n = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_n}{\frac{1}{n}} = 1$ ce qui signifie bien que $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.