Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2381

Dans cet exercice, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.
Soient $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ trois droites d'équations respectives :

$$\mathcal{D}_1 :\ -2x-3y+19=0,\qquad \mathcal{D}_2 :\ x+5y-20=0\qquad \text{et}\qquad \mathcal{D}_3 :\ 3x-y-12=0$$

1. Montrer que les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont sécantes en un même point $A\,(x_A,y_A)$ dont on déterminera les coordonnées.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_4$ qui passe par A et le point $B\,(3,-1)$.
3. Déterminer deux réels λ et μ tels que $\lambda(-2x-3y+19)+\mu(x+5y-20)=3x-y-12$.
4. Faire de même avec l'équation cartésienne de $\mathcal{D}_4$ trouvée à la question précédente.
5. Toutes les droites dont une équation cartésienne est de la forme $\lambda(-2x-3y+19)+\mu(x+5y-20)=0$ passent-elles par A ? Justifier votre réponse.
6. Quel résultat pourrait-on conjecturer et énoncer à l'issue de cet exercice ?

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2381

1.
   - Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux respectifs des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Ils ne sont pas colinéaires puisque $\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=-7$ et par conséquent, les deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes en un point $A\,(x_A,y_A)$ dont les coordonnées sont solutions du système $\begin{cases}-2x-3y+19=0\\ x+5y-20=0\end{cases}$, que l'on résoud par combinaison pour trouver $x_A=5$ et $y_A=3$, ce qui donne $A\,(5,3)$.
   - Le point A appartient à la droite $\mathcal{D}_3$ puisque $3\times x_A-y_2-12=3\times 5-3-12=0$.

   Par conséquent, les trois droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont sécantes au point $A\,(5,3)$.
2. La droite $\mathcal{D}_4$ passe par A et par $B\,(3,-1)$. Elle a donc pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$. Ainsi, $M\,(x,y)\in\mathcal{D}_4 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]=0$. Comme $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-5\\y-3\end{pmatrix}$, il vient $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]=\begin{vmatrix}x-5&-2\\y-3&-4\end{vmatrix}=-4(x-5)-(-2)(y-3)=-4x+2y+14$ et une équation cartésienne de $\mathcal{D}_4$ est $-4x+2y+14=0$, ou encore en simplifiant par -2, $\mathcal{D}_4 :\quad 2x-y-7=0$.
3. On cherche deux réels λ et μ tels que $\lambda(-2x-3y+19)+\mu(x+5y-20)=3x-y-12$.
   Puisque $\lambda(-2x-3y+19)+\mu(x+5y-20)=(-2\lambda+\mu)x+(-3\lambda+5\mu)y+19\lambda-20\mu$, en identifiant cette expression avec $3x-y-12$, il vient les relations : $\begin{cases}-2\lambda+\mu=3\\-3\lambda+5\mu=-1\\19\lambda-20\mu=-12\end{cases}$.
   On résoud le système formé par les deux premières équations $\begin{cases}-2\lambda+\mu=3\\-3\lambda+5\mu=-1\end{cases}$ par combinaison pour trouver $\lambda=-\dfrac{16}{7}$ et $-\mu=\dfrac{11}{7}$, et on vérifie que ces deux valeurs satisfont la troisième relation, ce qui est le cas puisque $19\times\left(-\dfrac{19}{7}\right)-20\left(-\dfrac{11}{7}\right)=-12$.
   Ainsi, on a : $\quad -\dfrac{16}{7}(-2x-3y+19)-\dfrac{11}{7}(x+5y-20)=3x-y-12$.
4. Sur le même principe, on trouverait que : $\quad -\dfrac{11}{7}(-2x-3y+19)-\dfrac{8}{7}(x+5y-20)=2x-y-7$.
5. Puisque A est le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, ses coordonnées vérifient chacune des deux équations cartésiennes de ces droites. Ainsi, en reportant les coordonnées de A dans l'expression $\lambda(-2x-3y+19)+\mu(x+5y-20)$, on

obtient clairement $\lambda\underbrace{(-2x-3y+19)}_{=0}+\mu\underbrace{(x+5y-20)}_{=0}=0$, et donc A appartient aux droites dont une équation cartésienne est de la forme $\lambda(-2x-3y+19)+\mu(x+5y-20)=0$.

6. On peut conjecturer le résultat suivant : « toute droite qui passe par le point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ a une équation cartésienne de la forme $\lambda(-2x-3y+19)+\mu(x+5y-20)=0$ et réciproquement ».

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2328

Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$. On définit la fonction f_n par : $f_n : \left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x^n+1-nx\end{array}\right.$.

1. Étude de l'équation $f_n(x)=0$:

a. Calculer $f_n'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

b. Montrer que f_n est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;1]$, et dresser son tableau de variation sur cet intervalle.

c. Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0;1[$, notée x_n.

2. Étude de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$:

On rappelle que pour $n\geq 2$, x_n est l'unique réel de l'intervalle $]0;1[$ qui vérifie $f_n(x_n)=0$.
On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 2}$ de réels.

a. Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$. Calculer $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $f_n\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

b. En déduire un encadrement de x_n et la limite de $(x_n)_{n\geq 2}$.

c. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(x_n)^n=0$.
On pourra revenir à une écriture exponentielle de cette puissance.

d. Montrer alors que $nx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

e. En déduire un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

f. Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$.

i. Étudier le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ pour $x\in[0;1]$.

ii. En déduire alors le signe de $f_{n+1}(x_n)$.

iii. Étudier alors la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2328

1. a. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_n'(x)=nx^{n-1}-n=n\left(x^{n-1}-1\right)$.

b. Pour tout $x\in[0;1]$, $x^{n-1}-1\geq 0$ et $x^{n-1}-1=0 \iff x=1$.
On en déduit donc le signe et les variations de f_n sur l'intervalle $[0;1]$.
Sur l'intervalle $[0;1]$, f_n' est négatire et ne s'annule qu'une seule fois. Ainsi, f_n est strictement décroissante sur cet intervalle.

c. La fonction f_n est continue sur $[0;1]$, stricement décroissante sur $[0;1]$ et telle que $f(0)=1>0$ et $f(1)=1-n<0$. Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotone, l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0;1]$, et comme $f(0)\neq 0$ et $f(1)\neq 0$, cette solution est dans $]0;1[$.

x	0		1
Signe de $f_n'(x)$		$-$	0
Variations de f_n	1	$\searrow$	$1-n$

2. a. On a $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^n + 1 - n\times\frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)^n$ et $f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^n + 1 - n\times\frac{2}{n} = \left(\frac{2}{n}\right)^n - 1$

b. On remarque que $f_n\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ et $f_n\left(\frac{2}{n}\right) < 0$, donc $\frac{1}{n} \leq x_n \leq \frac{2}{n}$, et par le théorème d'encadrement puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, il vient $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$, on a $(x_n)^n = \mathrm{e}^{n\ln(x_n)}$. Or $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par composition $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(x_n) = -\infty$. Finalement $n\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et on en déduit que $(x_n)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

d. Puisque x_n est solution de $f_n(x) = 0$, on sait que $(x_n)^n + 1 - nx_n = 0$ soit $nx_n = 1 - (x_n)^n$. Comme $(x_n)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient que $nx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

e. On remarque que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$, on a $nx_n = \frac{x_n}{\frac{1}{n}}$. De $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{\frac{1}{n}} = 1$ ce qui signifie bien que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

f. i. Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$. On a : $\forall x\in[0;1]$,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= x^{n+1} + 1 - (n+1)x - x^n - 1 + nx \\ &= x^{n+1} - x^n - x \\ &= x\left(x^n - x^{n-1} - 1\right) \\ &= x\left(x^{n-1}(x-1) - 1\right) \end{aligned}$$

Or pour tout $x\in[0;1]$: $\underbrace{\underbrace{x}_{\geq 0}\left(\underbrace{\underbrace{x^{n-1}}_{\geq 0}\underbrace{(x-1)}_{\leq 0}}_{\leq 0}\underbrace{-1}_{\leq 0}\right)}_{\leq 0}$

Par conséquent, pour tout $x\in[0;1]$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$.

ii. Il vient donc $f_{n+1}(x_n) - \underbrace{f_n(x_n)}_{=0} \leq 0$ et par suite $f_{n+1}(x_n) \leq 0$.

iii. Par définition des termes de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$, x_{n+1} est tel que $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. Puisque f_{n+1} est décroissante sur $[0;1]$ et que $f_{n+1}(x_n) \leq 0$, il vient $x_{n+1} \leq x_n$, et par conséquent, la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est une suite décroissante.